

**SVEUČILIŠTE U RIJECI  
POMORSKI FAKULTET U RIJECI  
RIJEKA**

DAVID KRAJCAR

**ESTIMACIJA GPS POZICIJE U SUSTAVIMA ZA NAVIGACIJU**

DIPLOMSKI RAD

**Rijeka, rujan 2013.**

**SVEUČILIŠTE U RIJECI  
POMORSKI FAKULTET U RIJECI  
RIJEKA**

**ESTIMACIJA GPS POZICIJE U SUSTAVIMA ZA NAVIGACIJU  
DIPLOMSKI RAD**

Kolegij: Automatsko upravljanje plovnim objektima  
Mentor: Prof. dr. sc. Vinko Tomas  
Student: David Krajcar  
Mat. br.: 0112034948  
Smjer: Elektroničke i informatičke tehnologije u pomorstvu

**Rijeka, rujan 2013.**

# SADRŽAJ:

1. UVOD .....	1
1.1. Predmet istraživanja .....	1
1.2. Svrha i ciljevi rada.....	2
1.3. Struktura rada .....	2
2. GLOBALNI NAVIGACIJSKI SATELITSKI SUSTAVI .....	4
2.1 Povijest GPS sustava.....	4
2.2 Karakteristike GPS sustava .....	5
2.2.1 Svemirski segment .....	5
2.2.2 Kontrolni segment .....	6
2.2.3 Korisnički segment.....	7
2.3 GPS servisi .....	7
2.3.1 Precizni pozicijski servis (PPS).....	8
2.3.1 Standardni pozicijski servis (SPS) .....	8
2.4 GPS signali, njihova modulacija i demodulacija.....	9
2.5 Povijest GLONASS sustava.....	14
2.6 Karakteristike GLONASS sustava .....	14
2.7 GLONASS Signali .....	15
3. NAVIGACIJSKI SUSTAVI U DINAMIČKOM POZICIONIRANJU PLOVNIH OBJEKATA.....	17
3.1 D-GPS .....	17
3.1.1 Lokalni sustavi .....	18
3.1.2 Prostorni sustavi .....	18
3.2 Relativni GPS.....	20
4. POGREŠKE GPS SUSTAVA .....	21
4.1 Pogreške zbog ograničene dostupnosti .....	21
4.2 Orbitalne pogreške .....	22
4.3 Pogreške zbog satelitskog sata .....	22
4.4 Ionosferske pogreške.....	24
4.5 Troposferske pogreške .....	27
4.6 Pogreške zbog višestaznog puta signala.....	28
4.7 Pogreške zbog šuma prijarnika.....	29

4.8 Pogreške zbog geometrije satelita .....	30
4.8.1 Simulacija odstupanja preciznosti .....	33
5. ESTIMACIJA POZICIJE GPS PRIJAMNIKA U SUSTAVIMA ZA NAVIGACIJU .....	41
5.1 Estimacija GPS pozicije metodom vjerojatnosti .....	41
5.1.1 Određivanje udaljenosti od satelita .....	42
5.1.2 Određivanje pozicije metodom vjerojatnosti .....	42
5.2 Estimacija pozicije pomoću Kalmanovog filtra .....	49
5.2.1 Algoritam Kalmanovog filtra .....	52
5.2.2 Proces estimacije u Kalmanovom filtru .....	54
5.2.3 Proces predikcije u Kalmanovom filtru.....	56
5.2.4 Model sustava – varijable stanja .....	58
5.2.5 Blok shema KF-a.....	60
5.2.6 Prošireni Kalmanov filter .....	61
5.2.7 Primjer estimacije GPS pozicije pomoću proširenog Kalmanovog filtra (EKF) ....	66
5.2.8 Nederivacijski nelinearan Kalmanov filter (UKF).....	77
5.2.9 Primjer estimacije GPS pozicije pomoću Nederivacijskog Kalmanovog filtra (UKF) .....	82
5.3 Komparativna analiza dobivenih rezultata .....	86
5.3.1 Preračunavanje koordinata iz ECEF koordinatnog sustava u geografski koordinatni sustav .....	86
5.3.2 Analiza rezultata estimacije pozicije u ECEF i LLA koordinatnom sustavu.....	88
5.3.3 Analiza relativne greške pri estimacije pozicije.....	90
6. ZAKLJUČAK .....	93
LITERATURA.....	95
POPIS SLIKA .....	98
POPIS TABLICA.....	99
PRILOZI.....	100
Prilog A Simulacija estimacije pozicije i DOP grešaka .....	100
Prilog A.1 Prikaz X,Y,Z koordinata pozicije u odnosu na GDOP vrijednost.....	101
Prilog A.2 Prikaz LLA koordinata pozicije u odnosu na GDOP vrijednost .....	102
Prilog B GPS_est_metoda_vjerojatnosti .....	103
Prilog C.1 Ulazni podaci simulacije; Pozicije satelita u ECEF koordinatnom sustavu .....	106
Prilog C.2 Ulazni podaci simulacije; Izmjerene pseudoudaljenosti.....	108
Prilog C.3 GPS_est_EKF_UKF .....	109

Prilog C.4 CV_Model.m .....	114
Prilog C.5 F_Pseudoudaljenost.m .....	114
Prilog C.6 EKF.m.....	115
Prilog C.7 UKF.m .....	116
Prilog C.8 ECEF_LLA.m.....	118
Prilog D.1 Prikaz estimiranih vrijednosti koordinata pozicije (ECEF).....	120
Prilog D.2 Prikaz estimiranih koordinata (LLA) .....	121
Prilog D.3 Prikaz relativne pozicijske greške u x, y, z ECEF koordinatama.....	122

# 1. UVOD

U svim granama današnjeg prometa pojavljuje se potreba za što točnijim navođenjem prometnih objekata. Navigacija predstavlja vještinu navođenja broda najpovoljnijim putem od jedne točke do druge. Pomorska se navigacija dijeli na obalnu, oceansku te polarnu navigaciju. Također postoji podjela s obzirom na način pozicioniranja broda, pa je možemo podijeliti na terestričku, astronomsku i elektronsku navigaciju. Zbog obavljanja raznih poslova, pogotovo u vrlo teškim uvjetima pomoću plovni objekata, slični sustavi kao kod navigacije koriste se pri pozicioniranju tih objekata. Najčešće se koriste razne kombinacije elektronskih sustava kako bi se što lakše i preciznije odredio točan položaj plovnog objekta. Točno određivanje položaja od velike je važnosti jer se na osnovu tog podatka ravnaju svi ostali sustavi. Postoje razne metode, od kojih su danas najzastupljeniji satelitski sustavi.

Najčešće korišteni satelitski sustav je američki GPS sustav (*eng. Global Positioning system*). Osnovni razlog je njegova zadovoljavajuća točnost, globalna pokrivenost, jednostavnost te dostupnost na tržištu. Slične karakteristike dijele i ostali sustavi kao što su GLONASS i GALILEO. GLONASS je ruski sustav koji trenutno nije dovoljno komercijaliziran, a GALILEO, europski koji još uvijek nije dovršen. Mnogo se ostalih brodskih sustava kao što su AIS, ECDIS, GMDSS oslanja na GPS što mu daje vrlo važnu ulogu. Zbog poboljšanja pouzdanosti i točnosti sustavi se još moraju dodatno poboljšati na način da se dopunjavaju ostalim terestričkim elektronskim sustavima.

## 1.1. Predmet istraživanja

U predmet istraživanja spada globalni navigacijski sustav GPS. Točnije, rad se bavi estimacijom pozicije GPS prijarnika na osnovu navigacijskih podataka koje šalju sateliti, i mjerenja udaljenosti između satelita i GPS prijarnika. Poziciju prijarnika moguće je estimirati pomoću više metoda. U radu se obrađuje metoda vjerojatnosti te metode pomoću dvije verzije nelinearnog Kalmanovog filtra (*eng. Kalman Filter, KF*). Prikazan je način funkcioniranja 3 vrste KF-a od kojih je 2 vrste moguće implementirati i usporediti na primjeru estimacije GPS pozicije.

## **1.2. Svrha i ciljevi rada**

Cilj rada je temeljno opisati problematiku pozicioniranja na osnovu GPS sustava u sustavima za navigaciju. Cilj je opisati različite metode estimacije pozicije te prvenstveno usporediti performanse dviju različite vrsta KF-a. Potrebno je izraditi simulaciju u Matlabu, odnosno potrebno je implementirati algoritme nelinearnih KF-a s ciljem estimiranja pozicije GPS prijavnika. Nakon izvršene simulacije cilj je rezultate grafički prikazati te zaključiti koji algoritam ostvaruje bolje rezultate.

Svrha rada je simulacijom odrediti koju metodu estimacije je potrebno koristiti kako bi se dobili odgovarajući rezultati, odnosno opravdava li se implementacija robusnijeg i kompleksnijeg rješenja pri estimaciji pozicije. Također, svrha je izraditi podlogu za daljnja istraživanja te daljnju optimizaciju postojećih rješenja.

## **1.3. Struktura rada**

U prvoj glavi dan je uvod u problematiku rada. Opisuju se globalni navigacijski sustavi te njihova uloga u navigaciji, vođenju i upravljanju. Opisuje se predmet rada, odnosno estimacija pozicije u GPS sustavima za navođenje pomoću različitih metoda. Nadalje, svrha i cilj rada opisuju postavljene ciljeve što podrazumijeva izradu simulacije i testiranje rezultata sa svrhom o odlučivanju potrebe korištenja složenijih algoritama. Zadnje poglavlje uvoda predstavlja strukturu rada.

Druga glava teoretski opisuje globalne navigacijske sustave, osobito američki GPS sustav pozicioniranja. Prvo poglavlje prikazuje razvoj sustava kroz povijest dok se u drugom poglavlju opisuju karakteristike sustava kao što su konstrukcija, signali, način rada. Treće poglavlje opisuje GPS servise, a u četvrtom su detaljnije prikazani GPS signali te njihova modulacija i demodulacija. U sljedeća 3 poglavlja uz povijesni razvoj prikazane su i karakteristike GLONASS sustava za navođenje kao usporedba GPS sustavu.

Treća glava prikazuje upotrebu prije navedenih sustava u dinamičkom pozicioniranju plovnih objekata. U poglavljima su prikazana proširenja postojećih GPS sustava za navigaciju s ciljem veće točnosti potrebne prilikom dinamičkog pozicioniranja.

Četvrta glava opisuje pogreške GPS sustava odnosno zbog čega dolazi do grešaka prilikom estimacije pozicije. Opisuju se greške zbog: ograničene dostupnosti, orbita, prolaska kroz ionosferu i troposferske, sata, geometrije satelita, odbijanja signala. Zadnje poglavlje

koje koji opisuje geometrijske pogreške sadrži i simulaciju utjecaja tih grešaka na estimaciju pozicije.

Peta glava opisuje sam proces estimacije GPS pozicije. Prikazano je više metoda estimacije. Prvo poglavlje prikazuje metodu vjerojatnosti pri estimaciji. Sljedeća poglavlja baziraju se isključivo na estimaciji pomoću KF. Opisane su karakteristike i način rada linearnog KF-a. Pošto su za estimaciju potrebne nelinearne verzije KF-a teoretski su opisane dvije verzije. U ovom se dijelu nalazi i simulacija estimacije pozicije pomoću dvije verzije KF-a. U zadnjem poglavlju grafički su prikazani rezultati simulacije te zaključci na osnovu tih simulacija.

Šesta glava predstavlja zaključak u kojem su sažeti predmet rada te postavljeni ciljevi i očekivanja. Na kraju, predstavljeni su ostvareni ciljevi te zaključci na osnovu rezultata istraživanja, odnosno rezultata simulacije.



## 2. GLOBALNI NAVIGACIJSKI SATELITSKI SUSTAVI

Satelitski navigacijski sustavi koji pružaju autonomno geoprostorno pozicioniranje s globalnom pokrivenošću nazivaju se globalni navigacijski sustavi. Omogućuju pozicioniranje pomoću malih elektroničkih prijamnika s odmakom od samo nekoliko metara koristeći vremenske signale koji se šalju sa satelita.

### 2.1 Povijest GPS sustava

Prema [1], nakon lansiranja prvih satelita, prvi službeni program s ciljem postavljanja satelita u svrhe pozicioniranja te zamjene starog sustava NAVSAT (*eng. Navy Navigation Satellite System*) pokrenut je 1964. g od strane Američke vojske. Te iste godine s radom počinje prvi sustav satelitske navigacije, Transit koji se upotrebljavao sve do 1996.g kada je ugašen. Koristio je konstelaciju od pet satelita, te je mogao osigurati navigacijski fiks približno jednom na sat. Tih 5 satelita, nalazilo se u niskim polarnim orbitama, na visini od 1000 km s vremenom ophodnje od 1h i 47 min. Kako bi se ukloni utjecaj atmosfere koristile su se dvije frekvencije od 150 i 400 MHz. Zbog malog broja satelita i ograničene konstelacije sustav je imao ograničenu dostupnost. Pojavljivao se svakih 30 min, a bio je dostupan samo 16 min od kojih je 10-15 trebalo za procesiranje signala. Pozicioniranje ovog sustava temeljilo se na određivanju udaljenosti od satelita na principu promjene frekvencije odaslanog signala zbog Dopplerovog efekta.

Kasnije, opisuje [2], iako su postojale velike potrebe za preciznu navigaciju i vojnom i civilnom sektoru, nisu opravdavale utrošak milijarde dolara u razvoj takvih sustava. Zbog sve veće nuklearne prijetnje postojanju samog SAD-a zaključilo se da bi se ostvarila velika prednost kada bi nuklearne podmornice i zrakoplovstvo imali veću točnost precizne pozicije, pa su tako upravo ovi zahtjevi opravdali daljnji razvoj sustava. Prvi prijedlog bio je dan od strane ratnog zrakoplovstva 1960.g, da se koristi MOSAIC (*eng. Mobile System for Accurate ICBM Control*) u svrhe navođenja interkontinentalnih raketa.

Druga studija provedena je 1963.g te je nazvana Project 57. Upravo je u ovoj studiji rođen koncept današnje GPS-a. Taj je projekt predlagao korištenje najboljih karakteristika iz 612B, Transita, Timationa i SECORA ukomponiranih u jedan superioran sustav. Tijekom 1973. g održan je sastanak u Pentagonu na kojem se predložilo stvaranje DNSS-a (*eng. Defense Navigation Satellite System*). Upravo je ovim prijedlogom stvorena stvarna sinteza koja se kasnije razvila u GPS. Iste je godine projekt DNSS nazvan NAVSTAR (*eng.*

*Navigation Satellite Timing and Ranging*), te kasnije preimenovan u NAVSTAR – GPS odnosno kasnije samo GPS. Taj se sustav temelji na određivanju udaljenosti od satelita na način mjerenja vremena potrebnog da signal stigne od prijarnika do predajnika. Prva skupina satelita za testiranje s limitiranom pokrivenošću lansirana je u vremenu od 1978. – 1985. godine. Potpuno operativan za vojne svrhe postaje 1995.g. Druga skupina naknadno lansiranih satelita na kojima se temelji današnji GPS, lansirana je u razdoblju od 1989. – 1997. godine.

## **2.2 Karakteristike GPS sustava**

GPS (*eng. Global Positionig System*) je sustav za vrlo točno i stalno određivanje pozicije, opisuje [3]. U vlasništvu je Ministarstva obrane SAD-a te je pod stalnim nadzorom. GPS radi na principu računanja udaljenosti od satelita na osnovi razlike vremena predaje i prijema signala, te poznate brzine signala. Do pozicije se dolazi određivanjem udaljenosti od više satelita - minimalno 3 za dvodimenzionalni prikaz (2D fix), ili četiri za trodimenzionalni položaj (3D fix). Ona se pretvara u koordinate, a najčešće korišten model oblika zemljine površine je WGS – 84 (*eng. World Geodetic System Refernce*) elipsoid. Matematički je jednostavno opisan a ne razlikuje se od geoida više od 100 m. Ako se koristi neki drugi lokalni zemljovid potrebna je implementacija algoritama za preračunavanje koordinata.

Prema [4], sustav se sastoji od 3 dijela:

### **2.2.1 Svemirski segment**

Čine ga 24 satelita koja su raspoređena u 6 orbitalnih ravnina kojima je nagib prema ekvatoru  $55^\circ$  te je razmak ravnina  $60^\circ$ . Sateliti su postavljeni na 20.183 km, a vrijeme obilaženja zemlje je 11 sati i 58 minuta. Orbite su približno kružne, polumjera 26570 km. Takav razmještaj omogućuje da se iz bilo koje točke na zemlji i u bilo koje vrijeme vide najmanje 4 satelita povoljne elevacije. Pravilan rad sustava nadzire se iz mnogih mjernih zemaljskih postaja raspoređenih po cijeloj zemlji, te pomoću glavne nadzorne postaje smještene u SAD-u. Upravo ta glavna postaja obrađuje i nadzire sve podatke te upravlja radom sustava na način uređivanja efemerida satelita, korekcije vremena te parametara sustava. Pomoću zemaljskih postaja podaci se šalju satelitima. Sve greške izmjerene u mjernim postajama šalju se glavnom centru koji vrši korekciju.



Slika 2.1: Konstelacija GPS satelita

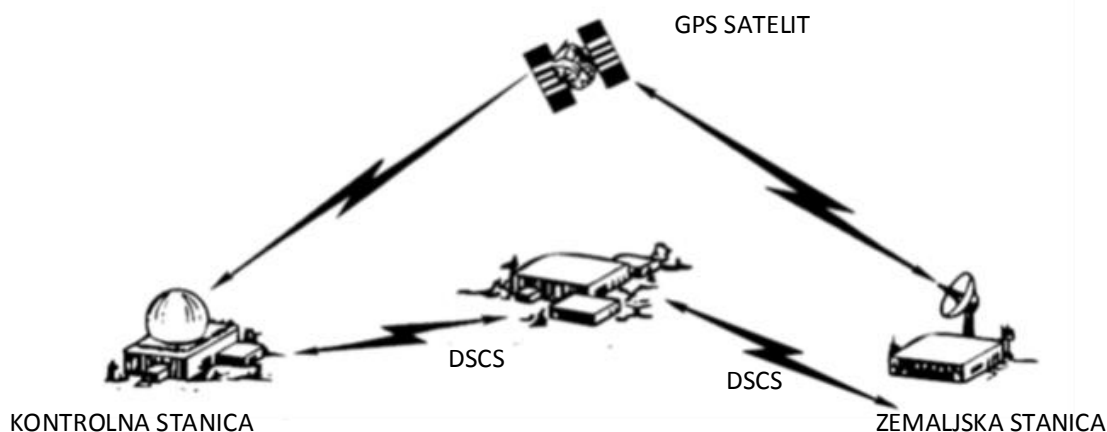
Izvor: [18]

Sateliti emitiraju signale na dvije frekvencije: Link 1 (*L1*), odnosno prva frekvencija je 1575.42 MHz i Link 2 (*L2*) na 1227.6 MHz. Signali se šalju koristeći tehniku raspršenog spektra (*eng. Spread Spectrum*), koristeći dva načina rangiranja kodova kao raspršene fikcije. Prvi način rangiranja je 1.023 MHz coarse/acquisition kod (*C/A- kod*) na *L1* i 10.23 MHz P-kod (*eng. Precision Code*) na *L1* i na *L2*. Oba se koda mogu koristiti za dobivanje točne pozicije ali je razlika u tome što je P – kod koristi enkripciju zbog čega je dostupan samo autoriziranim korisnicima (uglavnom za vojne potrebe). Kada je kriptiran P – kod naziva se i Y – kod. Navigacijska poruka sadrži podatak o vremenu, podatak o putanjama satelita (efemeride), korekcijske podatke zbog propagacije signala kroz ionosferu, podatke o satelitskom almanahu.

### **2.2.2 Kontrolni segment**

Kontrolni segment čine 5 kontrolnih stanica raspoređenih po zemlji, čija je zadaća neprestano praćenje gibanja GPS satelita. Te stanice kontinuirano prate i bilježe poruke odaslane sa satelita te ih prosljeđuju u glavni kontrolni centar ( *eng. Master Control Station, MCS*). Ove se stanice nalaze u Falconu – Air force base (Colorado Springs), Hawaiiima, Kwajalein-u, Diego Garcia-i i Ascension-u. Svi MCS osim oni na Hawaiiima i Falconu AFB također su opremljeni sa zemljanim antenama koje služe za periodičko osvježavanje podataka satelita. MCS je zadužen za nadzor i upravljanje konstelacijom satelita.

Komunikacija između MCS-a i antena odvija se prema DSCS-u (*eng. Defense Satellite Communication System*). Za dodatno održavanje satelita koristi se i dodatna mreža zemaljsko-svemirskih satelita pod nazivom AFCN (*eng. Air Force Satellite Control Network*), čiji primarni cilj nije održavanje satelita, ali se po potrebi koristi u te svrhe. Sljedeća slika prikazuje način komunikacije i slanje podataka satelitima.



*Slika 2.2: Prikaz GPS kontrolnog segmenta*

*Izvor: [1]*

### **2.2.3 Korisnički segment**

Korisnički segment čine svi korisnici koji imaju GPS prijemnike koji satelitske signale pretvaraju u informacije o poziciji (brodovi, zrakoplovi, automobili, mobilni uređaji, itd.). Korisnike možemo podijeliti u dvije grupe: autorizirane (američka vojska) i neautorizirane (civilni korisnici). GPS prijemnici se u pravilu sastoje od antene koja je podešena na frekvencije na kojima transmitiraju sateliti, procesora koji obrađuju podatke te sata koji mora biti vrlo stabilan (najčešće kristalni oscilator). Karakteristike se često opisuju po broju kanala odnosno koliko satelita može odjednom nadzirati. Broj kanala je u početku bio ograničen na 4-5 ali se kasnije povećao na oko 12-20 kanala. Uređaji se mogu povezivati s računalom uglavnom koristeći NMEA 0183 ili NMEAA 2000 protokole.

## **2.3 GPS servisi**

Postoje dvije vrste servisa koje su podržane od strane GPS sustava, navodi [5]. To su standardni pozicijski servis (*eng. Standard Positioning Service, SPS*) i precizni pozicijski servis (*eng. Precise Positioning Service, PPS*).

### ***2.3.1 Precizni pozicijski servis (PPS)***

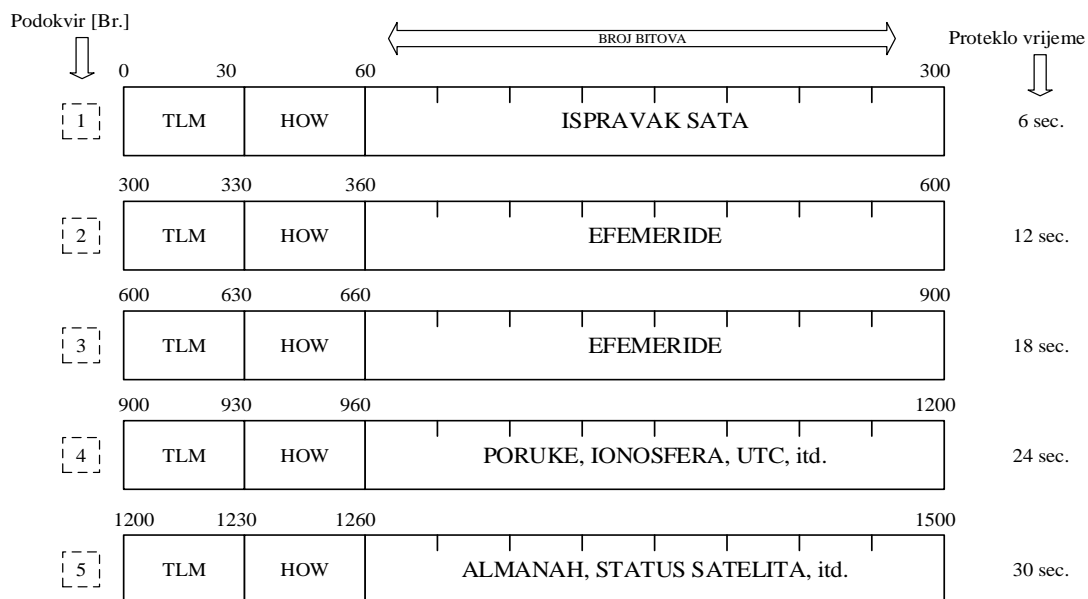
Prema [2], ovaj je servis dostupan samo autoriziranim korisnicima. Ovaj servis koristi američka vojska, NATO pakt te ostali odabrani vojni servisi i određeni civilni korisnici. Temelji se na mjerenjima preko obje frekvencije *L1* (1575,42 MHz) i *L2* (1227,60 MHz). Točnost PPS pozicioniranja je u 95 % vremena bolja od 22 m u horizontalnom i 28 m u vertikalnom smjeru. Potrebno je imati uređaje i kodove za dekriptiranje podataka. *L2* frekvencija služi za kompenzaciju ionosferskog kašnjenja. Ministarstvo obrane SAD-a najavilo je da će biti dostupna i civilna *L2* verzija za upotrebu, te u budućnosti i nova *L5* frekvencija za još bolju točnosti (s pogreškom od 1-5 m).

### ***2.3.1 Standardni pozicijski servis (SPS)***

Temelji se na mjerenjima samo na *L1* frekvenciji. Točnost je u 95 % vremena bolja od 36 m u horizontalnom i 77 m u vertikalnom smjeru. Ministarstvo obrane ima pravo namjerno ometati signal (*eng. Selective Availability, SA*) gdje onda točnost mora biti bolja od 100m u horizontalnom i 156 m u vertikalnom smjeru. *SA* je uredbom predsjednika USA 2000.g ukinuta, navodi [2].

## 2.4 GPS signali, njihova modulacija i demodulacija

Svaki satelit GPS-a kontinuirano emitira navigacijsku poruku brzinom od 50 bit/s.



Slika 2.3: Prikaz navigacijske poruke

Izvor: Autor prema [2]

Kao što [2] opisuje, poruka se sastoji od 25 okvira od kojih svaki sadrži 1500 bitova. Dalje, svaki okvir dijeli se na 5 300-bitnih manjih okvira od kojih svaki sadrži 10 riječi po 30 bit-a svaka. Brzinom od 50-bit/s potrebno je 6 s za slanje okvira i 30 s za slanje cijelog okvira. Za slanje kompletne poruke potrebno je 750 s ili 12,5 min. Svaki manji okvir započinje sa telemetrijskom riječi (TLM), duga je 8-bit te služi tome da prijemnik odredi gdje okvir počinje. Druga riječ naziva se HOW (*eng. Handover Word*). Manji okviri 1,2,3 imaju isti format za svih 25 okvira. Podokvir 1 sadrži podatak o ispravljanju sata i signale o točnosti i zdravlju signala dok manji okviri 2,3 sadrže parametre efemerida potrebna za računanje pozicije.

Poruka sadrži:

- Podatke o satelitskom almanah-u;

Orbitalni podaci koje šalje satelit omogućuju korisniku približno izračunavanje pozicije svakog GPS satelita u konstelaciji u bilo koje vrijeme. Ove podatke koristi prijemnik kako bi lakše utvrdio koje satelite treba dalje tražiti.

- Podatke o efemeridama;

Slični podaci kao almanah ali puno veće točnosti. Koriste se za određivanje pozicije satelita kada je potrebno konvertirati kašnjenje propagacijskog signala u poziciju korisnika.

- Podatke o vremenu;

Koriste se za ostvarivanje transmisijskog vremena specifičnih točaka GPS signala. Time se određuje kašnjenje signala između satelita i korisnika, te se koristi za rangiranje.

- Ionosferično kašnjenje;

Greške rangiranja mogu se otkloniti ako imamo podatke o ionosferičnom kašnjenju.

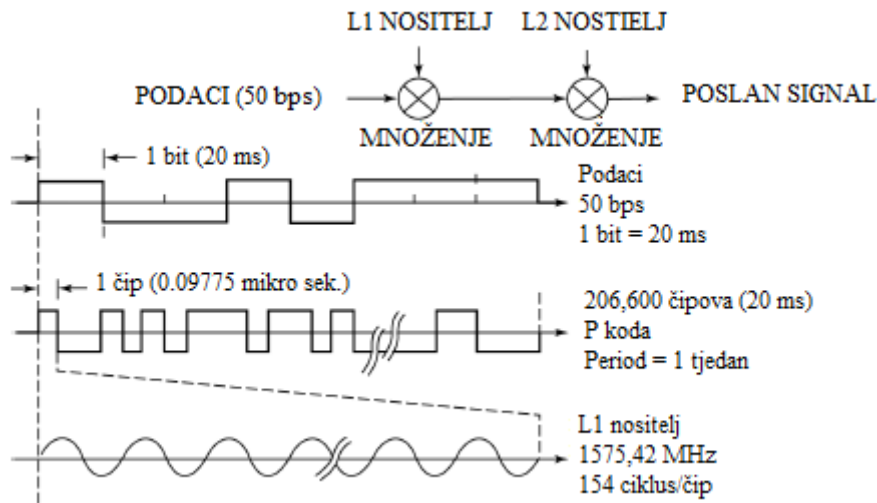
- Podaci o zdravlju satelita;

Omogućuje da prijemnik ignorira satelit ako nije u najboljem stanju.

Svi sateliti emitiraju na dvije frekvencije, *L1* i *L2*. Prijemnik lako može razlikovati signale jer koristi tehniku raspršenog spektra odnosno kodni način multipleksiranja (*eng. Code Division Multiple Access, CDMA*), gdje se podaci poruke s niskom razinom prijenosa kodiraju pseudonasumičnom sekvencijom visoke razine koja je različita za svaki satelit. Koriste se dva različita CDMA kodiranja:

- grub/akvizicijski – **C/A kod** (*eng. Coarse/Aquisition*) – Na 1,023 milijuna čipova u sekundi, javan je i koriste ga civilni GPS prijemnici;
- precizni – **P-kod** (*eng. Precision Code*) – Na 10,23 milijuna čipova u sekundi, i kriptiran je.

*L1* nosač moduliran je s oba koda, dok je *L2* moduliran samo P kodom. Oba koda otkrivaju korisniku precizno vrijeme.

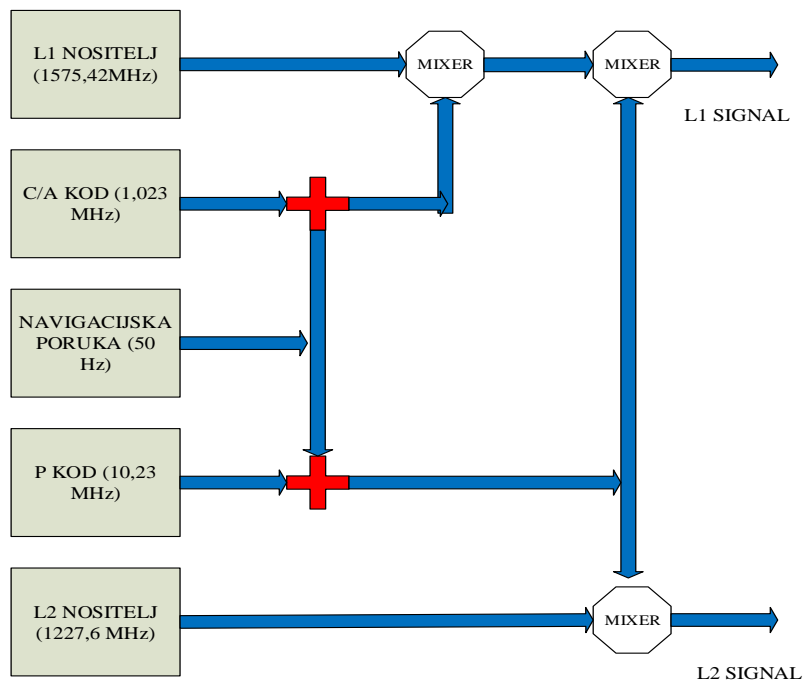


Slika 2.4: Struktura četvero fazne komponente L1 signala

Izvor: [2]

Zbog činjenice da su svi signali modulirani na istoj frekvenciji  $L1$  u slučaju C/A koda potrebno je odvojiti signale nakon demodulacije, opisuje [1]. Odvajanje se ostvaruje dodjeljivanjem jedinstvene pseudonasumične sekvence svakom satelitu koja se naziva zlatni kod, pa se signali dekodiraju nakon demodulacije pomoću modulo 2 dodatka zlatnog koda. Zlatni kodovi koriste sekvenciju od 1023 bita s periodom od 1 milisekunde. Postoji 1025 različitih zlatnih kodova od kojih se koristi samo njih 32.

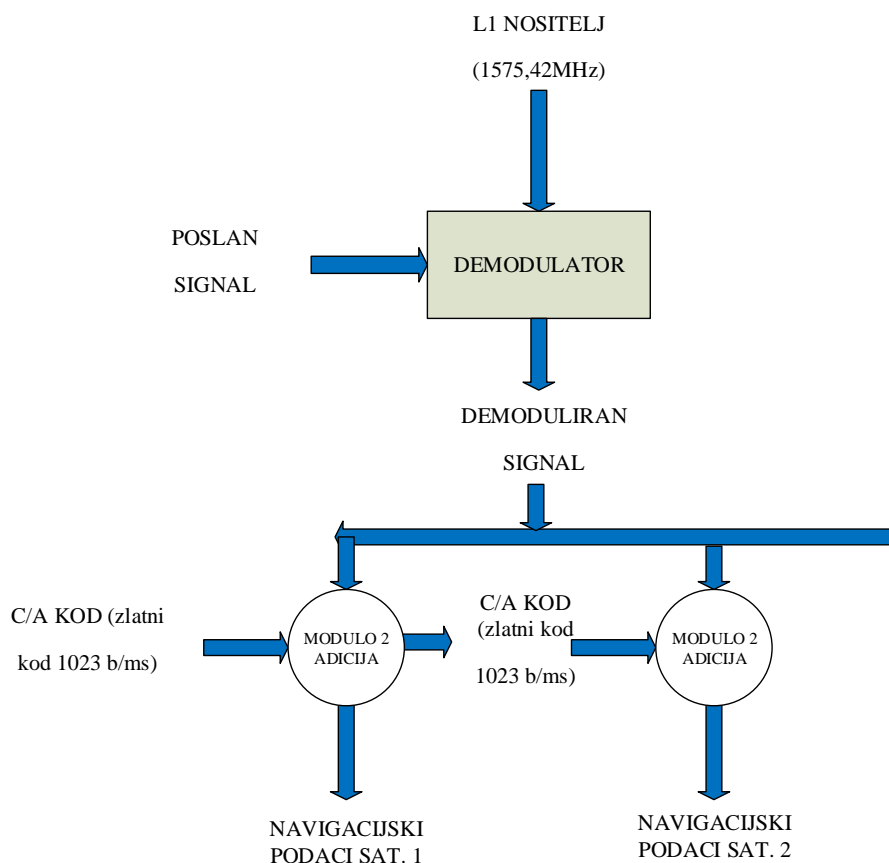




Slika 2.5: Modulacija satelitskog GPS signala

Izvor: [1]

Prijamnik koristi C/A zlatni kod s istim PRN (*eng. Pseudo Random Noise*) brojem kao i satelit radi izračunavanja pomaka koji generira najbolju korelaciju, navodi [6]. Ako se korelacija ne postigne PRN kod zamjenjuje se za jedan bit u odnosu na PRN kod satelita, pa se signali opet uspoređuju. Ako se ne pronade korelacija u 1023 slučaja frekvencijski oscilator pomiče se na sljedeću vrijednost. Svako pomicanje frekvencije očitava se kao funkcija fazne greške i učestalosti fazne greške. Dopplerova brzina se izračunava kao funkcija frekvencijskog pomaka od nominalne frekvencije nosača.



Slika 2.6: Demodulacija satelitskog GPS signala

Izvor: Autor prema [6]

C/A kod širi se snagom  $L1$  nositelja širinom pojasa od 2.046 MHz centriranom na 1575.42 MHz. P(Y) kod se širi preko pojasa od 20.46 MHz centriranog na otprilike 1575.42 MHz za  $L1$  te 1227.6 MHz za  $L2$  vezu. Komponenta od  $L1$  kad je u pitanju C/A kod ima snagu od -160 dBW, kod P(Y) koda signal ima snagu od -163 dBW te kod  $L2$  linka snaga je -166 dBW, opisuje [1].

## **2.5 Povijest GLONASS sustava**

Drugi sustav za globalno pozicioniranje je GLONASS (*eng. Global Orbiting Navigation Satellite System*), postavljen u orbitu od strane bivše Sovjetske unije opisuje [2]. Danas ga održava, unaprjeđuje i nadzire Republika Rusija.

Prvi radio-satelitski navigacijski sustav proizveden od strane Sovjetske unije bio je Tsiklon. Nije bio učinkovit za navođenje, posebno ne za nove generacije interkontinentalnih raketa. Zbog toga se u razdoblju od 1968-1969 osnovao projekt za novi navigacijski sustav. Uvjeti su ispunjeni već sljedeće godine te je 1976. g donesena odluka o lansiranju navigacijskog sustava GLONASS. Po projektu morao je sadržavati 24 satelita na visini od 20000 km. Originalno je trebao davati točnost od 65 m, ali je u realnosti imao točnost od 20 m za civilne usluge te 10 m za vojne potrebe.

U ranim 80-im NPO PM dobio je prve prototipove satelita, koji su zbog loše kvalitete morali biti redizajnirani. Dana 12.10.1982 lansirana su tri satelita (Kosmos 1413,1414,1415). Lansiranje je u nekoj mjeri bilo tajno, jer se znalo samo za jedan satelit.

Od 1982.- 1992. g Sovjetska unija uspješno je lansirala ukupno 43 GLONASS satelita plus 5 testnih. Kasnije, konstelaciju je preuzela Ruska federacija te nastavila unaprjeđivanje. Sustav se kasnije sastojao od 12 operativnih satelita, te je 1993. g proglašen operativnim. Broj satelita je 1995.g povećan na optimalan broj – 24 čime je postigao kvalitetu američkog GPS-a.

Sustav je zbog krize u razdoblju od 1989-1999. g, odnosno zbog malog ulaganja u održavanje i razvoj spao na svega 6 operativnih satelita u 2001.godini. Kada se financijska situacija popravila, 2003.g lansirana je druga generacija satelita GLONASS-M. Na zahtjev političara 18.5.2007. g sustav je oslobođen svih restrikcija. Prijašnji precizni vojni sustav s točnosti od 10 m bio je dostupan civilnoj upotrebi. [8]

U lipnju 2008.g sustav se sastojao od 16 satelita od kojih je zdravih bilo 12. U rujnu iste godine sredstva za razvoj sustava povećana su s ciljem postavljanja 24 satelita do 2010. godine. U listopadu 2011.g lansiran je posljednji 24 –ti satelit. Iako je potpuno operativan, nije komercijaliziran kao američki GPS.

## **2.6 Karakteristike GLONASS sustava**

Prema [8], GLONASS koristi 24 satelita raspoređena u 3 orbite, za razliku od GPS gdje ih postoji 6. To znači da postoji 8 satelita po orbiti (4 GPS). Svaka orbita ima nominalnu

inklinaciju od  $64.8^\circ$  i period od 11 sati i 15 minuta. GLONASS-ove orbite imaju manji radijus nego gps orbite, oko 25510 km. Ovaj je sustav pogodniji za veće zemljopisne širine. Koordinate pozicije ne dobivaju se u WGS-84 sustavu na kojem se temelji GPS i većina karata pa je potrebno uvesti korekcije. Temelji se na sovjetskom geocentričnom sustavu iz 1985.g SGS 85 ili od 1993.g u novom PZ-90 sustavu.

Kontrolni segment nalazi se području bivšeg Sovjetskog saveza. Glavni kontrolni centar nalazi se u Moskvi, dok se telemetrijski i nadzorni centri nalaze u St. Petersburgu, Ternopolu, Enisejsku, Komsomolsk-na-Amure.

## 2.7 GLONASS Signali

Slično kao i kod GPS-a GLONASS sateliti emitiraju dvije vrste signala, opisuje [1]:

- **SP** (*eng. Standard Precision*) – Standardna preciznost;
- **HP** (*eng. High Precision*) – Visoka preciznost.

Signali koriste slično DSSS kodiranje i BPSK modulaciju kao i GPS signali. Svi sateliti šalju isti kod kao njihov SP signal, ali svaki šalje na različitoj frekvenciji koristeći tehniku frekvencijske raspodjele s višestrukim pristupom (*eng. Frequency Division Multiple Access, FDMA*) s početkom na 1602 MHz. Ova frekvencija predstavlja  $L1$ , 1602 MHz je centralna frekvencija, a ostale frekvencije su  $1602 \text{ MHz} + n * 0.5625 \text{ MHz}$ , gdje je  $n$  broj kanala frekvencije satelita.

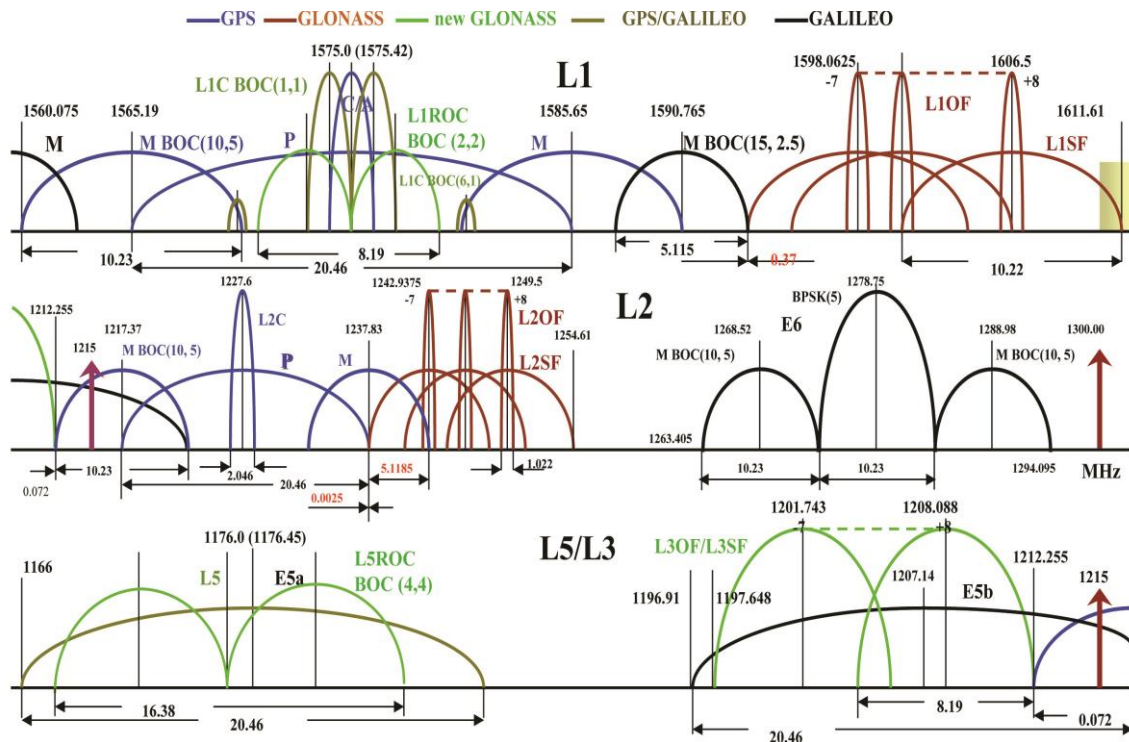
Transmisija signala obavlja se u konusno u iznosu od  $38^\circ$  stupnjeva koristeći desnu cirkularnu polarizaciju s iznosom EIRP između 25 i 27 dBW.

HP signali ( $L2$ ) šire se u fazi kvadratno s SP signalom (QPSK), koristeći isti signal nositelj ali s 10 puta većim pojasom nego SP signal. Kao i  $L1$  i  $L2$  koristi FDMA ali s centralnom frekvencijom 1246 MHz odnosno jednadžbom  $1246 \text{ MHz} + n * 0.4375 \text{ MHz}$ .

Najveća točnost SP signala iznosi 5-10 m horizontalno i vertikalno 15 m. Ovi podaci su za prvu generaciju satelita. GLONASS-M još dodatno popravljajući rezultate. HP signali dostupni su autoriziranim korisnicima (Ruska vojska). Za razliku od P kodova koji su kriptirani, HP signali osiguravaju se tako da se slobodno šalju kao nejasni prijammnicima za koje nisu namijenjeni. Civilni se SP signali emitiraju u na  $L2$  isti kao i na  $L1$ . Brzina slanja navigacijske poruke iznosi 50 baud (simboli/sek). Ostala analiza signala slična je kao i kod

GPS-a. Novi GLONASS sustav sadrži i  $L3$  i  $L5$  signale koje se odašilju na različitim frekvencijama.

Slika 2.7 prikazuje usporedbe frekvencijskih spektara GPS, GLONASS i novog GALILEO sustava.



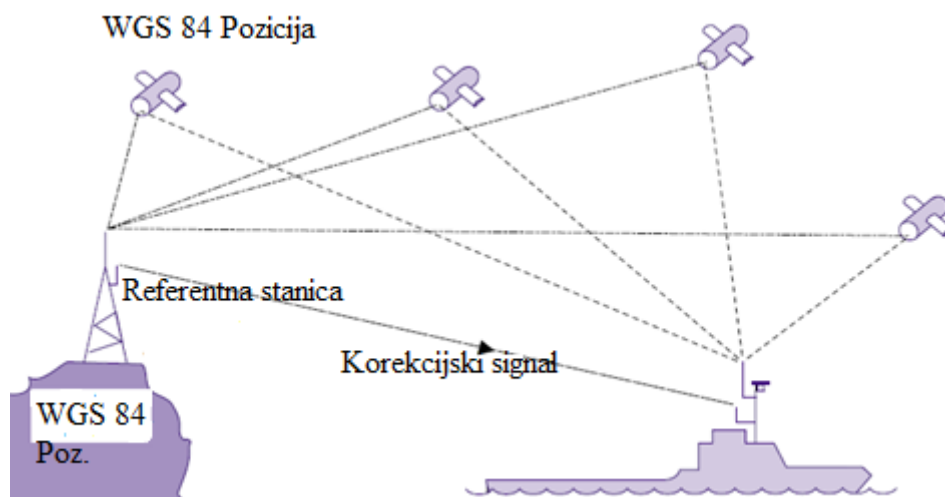
Slika 2.7: Usporedba frekvencijskih spektara signala GPS, GLONASS i GALILEO sustava

Izvor: [18]

### 3. NAVIGACIJSKI SUSTAVI U DINAMIČKOM POZICIONIRANJU PLOVNIH OBJEKATA

#### 3.1 D-GPS

Prema [1],[3],[5], diferencijalni GPS proizveden je kako bi se pokrila potreba za pozicioniranjem u primjenama gdje je potrebna veća točnost od one koju može ponuditi običan GPS sustav. Ova je karakteristika vrlo bitna kod preciznih sustava dinamičkog pozicioniranja. Princip rada diferencijalnog GPS sustava zasniva se na postojanju dodatnog referentnog prijemnika postavljenog na poznatu lokaciju te postojanja korisničkog DGPS prijemnika odnosno mobilnog DGPS uređaja. Svaka referentna stanica prima pozicije satelita te računa njihovu poziciju. Pošto je stanica fiksna tj. zna svoju točnu poziciju, računa korekcijsku vrijednost za svaki satelit te je šalje preko podatkovne veze na DGPS prijemnik odnosno plovni objekt. Mobilni prijemnik koristi korekcijsku vrijednost pa ispravlja greške za svoje satelite. Ovaj sistem je moguć zbog postojanja dva prijemnika koji su razdvojeni do čak 500 Km pa na njih utječe ista vremenska greška satelita.



Slika 3.1: Princip rada DGPS-a

Izvor: [3]

Greške satelita dešavaju se zbog propagacije signala kroz atmosferu, ionosferu te zbog satelitskog sata i grešaka efemerida. Prihvaćeni standardi za standardni DGPS pozicijski

sustav nastali su od strane RTCM –a (eng. Radio Technical Commission for Maritime Services) prema specijalnom komitetu 104 (SC-104).

S obzirom na način rada postoji više načina rada DGPS sustava.

### ***3.1.1 Lokalni sustavi***

LADGPS (eng. *Local Area DGPS*) – Oblik DGPS-a gdje korisnički prijemnik prima pseudoudaljenost, korekcije faze signala nositelja u realnom vremenu od lokalnog prijemnika, lociranog na poznatoj fiksnoj lokaciji u području optičke vidljivosti. Korekcijske vrijednosti su greške efemerida i greške satelitskog sata kombinirane s greškama kašnjenja propagacijskog signala. Udaljenosti prijamnika od referentne stanice u pravilu nisu veće od 170 Km u slučaju optičke vidljivost. Podaci se u lokalno području mogu dostavljati na razne načine a najčešće se radi o radio vezi, radiofarovima odnosno hiperbolnim sustavom LORAN C. Pogreška se nikad ne da potpuno ukloniti jer položaj satelita prema diferencijskoj i brodskoj postaji nije nikad isti jer što se više prijemnik odmiče, pogreška je veća. Korisnici unutar 100 m od postaje mogu očekivati pogrešku ne veću od 1-3 m. Za svakih daljnjih 100 m pogreška se povećava za 1 m. U najlošijem slučaju pogreška u 95% slučajeva ne bi smjela biti veća od 10 m. [18]

### ***3.1.2 Prostorni sustavi***

WADGPS (eng. *Wide Area DGPS*) - Emitiranje korekcijskih podataka ostvaruje se preko satelita ili Internetom. Na taj se način još dodatno može povećati točnost sustava jer se korekcijski podaci dostavljaju preko geostacionarnih satelita. Ovaj se način naziva:

- SBAS (eng. *Satellite Based Augmentation System*) – Sustav se sastoji od mreže diferencijskih postaja čiji je zadatak kontinuirano mjerenje te podatke kasnije razlažu za svaki GPS satelit posebno, opisuje [18]. Točnost može biti nešto lošija od lokalnog sustava jer postoji pretpostavka da prijamnici na različitim lokacijama ne vide iste satelite.

Postoje tri glavne komponente SBAS sustava, navodi [7]:

1. **EGNOS** (eng. *European Geostationary Navigation Overlay Service*) – Ovaj sustav pokriva područje Europe s tri geostacionarna satelita za prijamnik GPS-a i

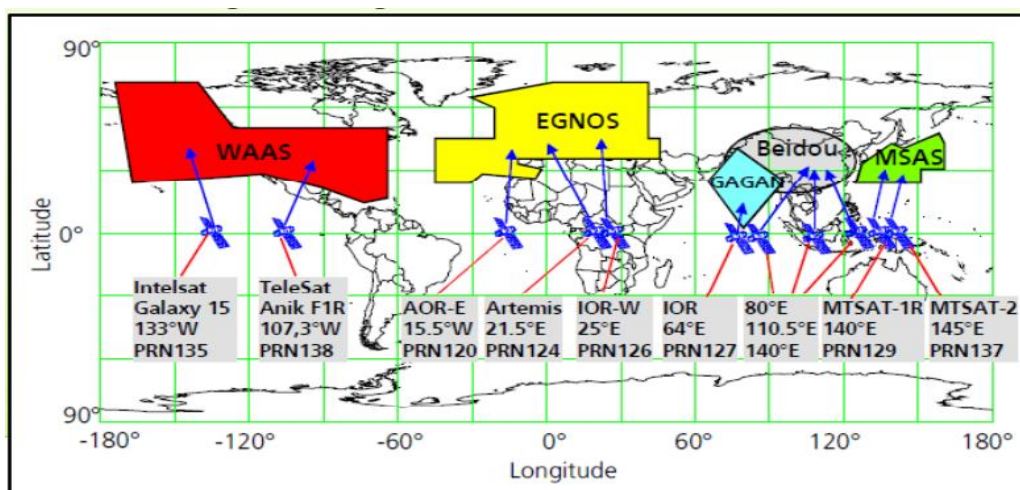
GLONASS-a. Jamči se točnost pozicije od 5 m. Pošto Europa nema još u pogonu potpuno funkcionalni navigacijski sustav EGNOS se koristi za američki GPS i za ruski GLONASS. Sastoji se od 4 segmenta:

- Svemirski segment – sastoji se od 3 geostacionarna GEO satelita
- Kontrolni segment – 34 pratećih stanica, 4 kontrolna centra, 6 terestričkih navigacijskih stanica te EWAN širokopojasnu mrežu.
- Korisnički segment

2. **WAAS** (*eng. American Wide Area Augmentation System*) – Pokriva područje Amerike s dva geostacionarna satelita. Točnost pozicije nešto je manja, ali isto nije veća od 5 m. Sadrži jezgru od oko 25 široko pojasnih terestričkih stanica pozicioniranih po SAD-u (*eng. WRS*). Te stanice šalju njihova mjerenja u glavnu WAAS stanicu koristeći terestričke komunikacije na čiju osnovu glavna stanica računa korekcijske algoritme te postiže integritet sistema. WAAS prijemnici primaju ispravljene GPS signale, čime se postiže vrlo visoka preciznost. Od 2005.g naprijed WAAS je dostupan u 99% slučajeva, te pokriva cijele SAD i većinu Aljaske. Točnost koju postiže je manja od 2 m u horizontalnom i manje od 3 m u vertikalnom smjeru

3. **MSAS** (*eng. Japanese Multi-functional Transport Satellite*) – Pokriva azijsko područje te također omogućuje točnost unutar 5 m.

Postoji još ostali sličnih sustava od kojih su neki SNAS (Kineska verzija SBAS-a), GAGAN (Indijska verzija SBAS-a).



Slika 3.2: Prikaz pokrivenosti SBAS sustava

Izvor: [7]

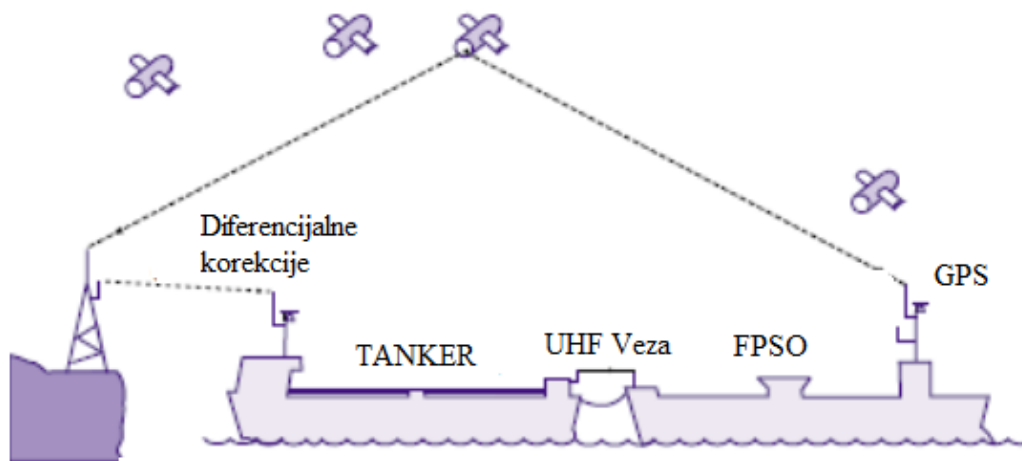


DGPS također povećava integritet GPS-a kompenzirajući anomalije signala satelita i navigacijskih poruka.

### 3.2 Relativni GPS

Posebne operacije dinamičkog pozicioniranja zahtijevaju relativno pozicioniranje plovnog objekta u odnosu na pomičnu strukturu odnosno pozicioniranje između pomičnih plovnih objekata, navodi [3]. Primjer može biti operacija između tankera i FPSO-a (*eng. Floating Production Storage and Offloading*). Krma FPSO-a opisuje luk kruga, odnosno podrazumijeva pomicanje broda: napredovanje, zanošenje, zaošijanje što predstavlja problem pozicioniranja tankera.

Za mjerenje relativne pozicije GPS nisu potrebne diferencijalne korekcije kao kod DGPS-a, zato što su greške pozicioniranja iste za tanker i FPSO. Sustav radi na principu da odašiljač na FPSO brodu šalje primljene DGPS podatke preko UHF komunikacije na tanker koji ima domet 2-3 km što predstavlja i maksimalnu duljinu na kojoj ovaj sustav radi. Računalo na tankeru računa daljinu, kut od krme FPSO-a. Ti se podaci sada ubacuju u DP sustav kako referentna pozicija. Na sljedećoj slici prikazan je princip rada:



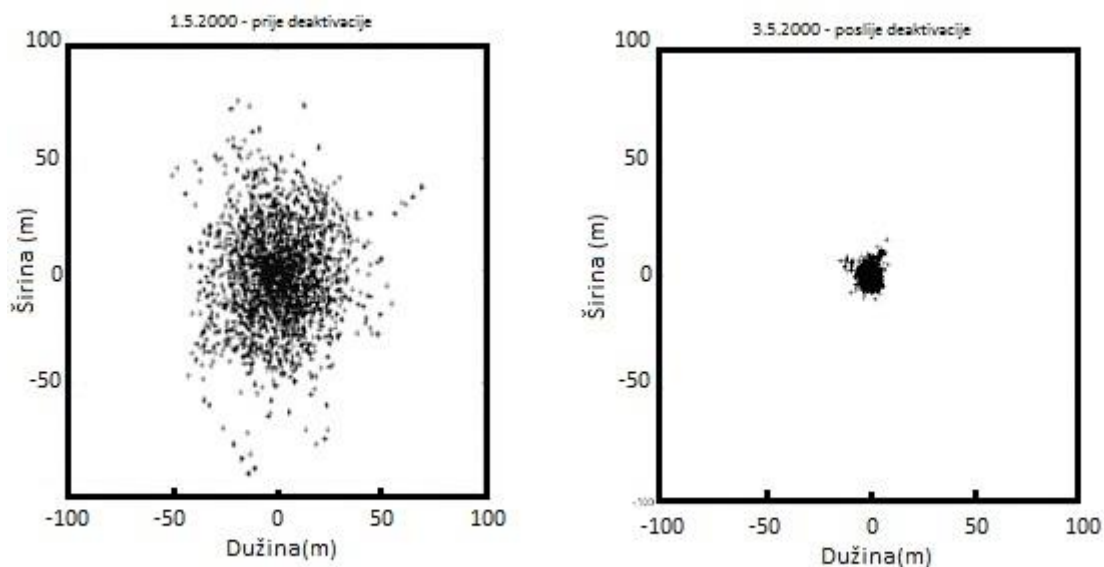
Slika 3.3: Prikaz rada Relativnog GPS-a

Izvor: [3]

## 4. POGREŠKE GPS SUSTAVA

### 4.1 Pogreške zbog ograničene dostupnosti

U [19] se navodi kako je razdoblju do 1. svibnja 2000. godine postojao mehanizam namjernog ometanja signala od strane američke vojske, odnosno DoD-a (*eng. Department of Defense*). Taj se mehanizam naziva ograničena dostupnost odnosno SA (*eng. Selected Avilabilty*). Bio je postavljen na način da u GPS SPS modu degradira točnost na 100m horizontalno i 156m vertikalno. Namjerno se ometao civilni signal, dok je onaj za vojne potrebe bio točan. Glavni razlozi ometanja signala bili su sigurnosni razlozi, posebno borba protiv terorizma kako npr. teroristi ne bi bili u mogućnosti saznati točnu lokaciju u kratkom vremenu te podatak iskoristiti za napad na određen cilj. Kako je kasnije došlo do naglog širenja i potrebe za GPS sustavom, SA ometanje potpuno je ugašeno. Slika 4.1 prikazuje stanje prije i poslije gašenja SA ometanja. Podaci na lijevom grafu prikupljeni su 1. svibnja 2000 g. , a na desnom nakon gašenja 3. svibnja 2000. godine. Podaci se odnose na vremenski period od 24 sata. S uključenim SA 95% svih pozicija se nalazi u radijusu od 45 m, dok se nakon gašenja radijus smanjuje na 6.3 m.



Slika 4.1: SA prije i poslije deaktivacije

Izvor: [19]

## 4.2 Orbitalne pogreške

Prema [19], GPS orbite mogu se izračunati na dva načina, od kojih je jedan taj da se Keplerovi i perturbacijski parametri odašilju u navigacijskoj poruci, u intervalu od 2 sata. Navigacijska poruka se formira na osnovu mjerenja s pet stanica za nadgledanje koje se nalaze na zemlji. Korištenjem Spilker-ovih jednadžbi, koordinate satelita određuju se u ECEF (*eng. Earth Centered Earth Fixed*) koordinatnom sustavu pomoću odaslanih efemerida. Kao što je ranije navedeno, navigacijska poruka dodatno sadrži i estimaciju točnosti odaslanog sata i orbite što je i poznato pod nazivom URA (*eng. User Range Accuracy*).

U [20] se navodi alternativna metoda proračunavanja satelitskih koordinata korištenjem preciznih orbita. Precizne orbite se deklariraju se kao 3 forme. Prva, najmanje točna forma naziva se *Ultra-Rapid* orbita. Ova orbita sadrži podatke za 48 h gdje se prvih 24 sata proračunavaju podorbite pomoću podataka dobivenim s preko 50 internacionalnih GPS stanica, a sljedeća 24 sata orbite se estimiraju te su kao takve dostupne za pozicioniranje. Druga forma su *Rapid* orbite kod kojih su estimirane pod-orbite dostupne jedan ili dva dana nakon što su podaci prikupljeni. Najtočnije, *Final* orbite dostupne su tek nakon 2 tjedna od prikupljanja podataka.

Dakle, satelitske efemeride određuje glavna stanica na temelju praćenja kontrolnih stanica pa se zbog točnog poznavanja položaja kontrolnih stanica koristi obrnuti proces gdje se proračunavaju orbitalni parametri satelita kao da su oni korisnici.

Temeljem procjene orbitalnih parametara, kontrolne stanice šalju podatke o efemeridama na svaki satelit, koji zatim prenosi podatke do korisnika preko navigacijske poruke. Pogreške u položaju satelita nakon što se izračunaju iz efemerida daju pogrešku pri određivanju položaja manju od 1 m.

## 4.3 Pogreške zbog satelitskog sata

Svaki od GPS satelita sadrži precizan atomski sat pomoću kojeg se kontrolira vrijeme prijena signala. Iako su satovi prilično točni, pogreške zbog satnih oscilatora mogu biti dovoljno velike da zahtijevaju ispravke. S jedne strane ispravke su potrebne i zbog činjenice da je teško besprijekorno sinkronizirati satove svih satelita. Dopušteno je da satovi imaju određeno odstupanje koje se procjenjuje u zemaljskim postajama te se koristi kod generiranja korektivnih podataka u GPS navigacijskoj poruci. Nakon obavljene korekcije, koja tipično

vrijedi 4-6 sati pogreška u GPS vremenu manja je od nekoliko nanosekundi što se odražava na točnost od 1 metra, navodi [19].

Prema [2], pogrešku satelitskog sata moguće je odrediti koristeći parametre navigacijske poruke. Jednadžba za određivanje pogreške satelitskog sata glasi:

$$dt = af_2(t - t_{oe})^2 + af_1(t - t_{oe}) + af_0 + d_{rel} - t_{gd} ; \quad (1)$$

gdje su:

$dt$  – pogreška satelitskog sata (s);

$af_2$  – koeficijent drugog reda ( $s^{-1}$ );

$t$  – vrijeme mjerenja (s);

$t_{oe}$  - vrijeme efemeride (s);

$af_1$  – koeficijent prvog reda;

$af_0$  – koeficijent nultog reda (s);

$d_{rel}$  – relativistička korekcija (s);

$t_{gd}$  – grupno kašnjenje (s).

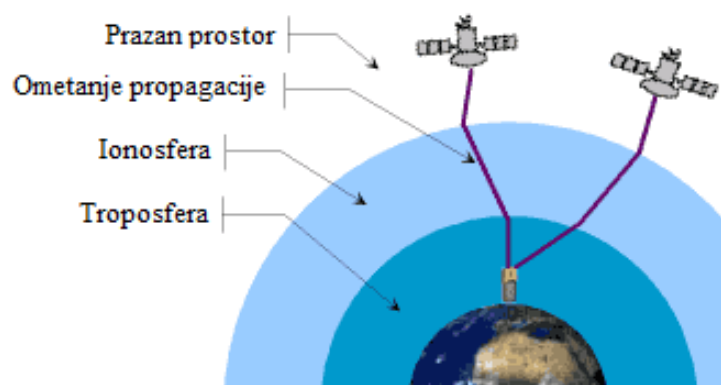
U izrazu 1 može se vidjeti da postoji korekcija za relativnost. Do vidljivog pomicanja frekvencija u satelitskom oscilatoru ponajprije dolazi zbog razlika u brzini i gravitacijskom potencijalu satelitske antene. Zbog ove pogreške može doći do netočnosti od oko 70 ns, pa se korištenjem relativne korekcije kašnjenje uklanja. Grupno kašnjenje podrazumijeva kašnjenje uslijed utjecaja atmosfere pa i ovo kašnjenje mora biti uklonjeno iz pogreške satelitskog sata, objašnjava [2].

U [7] je opisano kako je zbog činjenice da je odaslana navigacijska poruka ustvari predikcija, proračunavanje sata iz jednadžbe nepouzđano. Bolja estimacija može se postići korištenjem preciznih satova od strane agencija koje nude i precizne orbite. Kao i kod orbita, postoje tri kategorije preciznih satova. Prva kategorija podrazumijeva ultra brze (*eng. Ultra Rapid*) satove koji se predviđaju te njihova točnost iznosi 5 ns odnosno 150 cm. Brzi (*eng. Rapid*) su druga kategorija satova koja se kao i treća kategorija (*eng. Final*) proračunavaju

pomoću IGS podataka te im točnost iznosi 0.2 odnosno 0.1 ns što je ekvivalent 6 i 3 cm u dužini.

#### 4.4 Ionosferske pogreške

Prema [2], ionosfera je sloj plinova ioniziranog solarnom radijacijom koji se proteže od 50 do 1000 km iznad zemljine površine.



Slika 4.2: Prikaz propagacijskog puta signala

Izvor: [19]

Ionizacija provodi oblake slobodnih elektrona koji se ponašaju kao disperzivni medij za GPS signale, gdje je brzina propagacije funkcija frekvencije. Važna karakteristika ionosfere je mijenjanje svojstva tokom dana. U kasno popodne ionizacija je najveća, a nekoliko sati poslije ponoći minimalna.

Prema [2], glavna smetnja ionosfere za GPS signal je promjena brzine signala u odnosu na brzinu signala u slobodnom prostoru, odnosno usporavanje signala. Modulacija signala kasni dok se faza prijenosnog signala uvećava za isti iznos. Zbog toga je pomoću koda izmjerena pseudoudaljenost veća od ispravne vrijednosti, a izmjerena pomoću faze manja za isti iznos. Magnituda pogreške je proporcionalna s potpunim zbrojem elektrona (*eng. Total Electron Count, TEC*) u presjeku linije propagacijskog puta od  $1\text{m}^2$ . Ova magnituda varira ovisno o sunčanom ciklusu. U slučaju solarnog maksimuma, TEC je 2-3 puta veći nego za vrijeme solarnog minimuma. Također, vremenske promjene pored ionosferske molekularne dinamike uzrokovane su i s brzim promjenama propagacijskog puta uslijed pomicanja satelita. Propagacijski put ovisi i o elevacijskim kutovima, odnosno što je kut manji propagacijski put

je duži pa se ovako nastale greške uglavnom kompenziraju uzimanjem mjerenja iz satelita do određene granice elevacijskih kutova.

Kao što je ranije navedeno, pogreška ovisi o frekvenciji signala pa tako komercijalni GPS prijemnici koristeći samo  $L1$  frekvenciju mogu u nediferencijalnim operacijama smanjiti pogrešku mjerenja uzrokovanu ionosferom. Pogreška se smanjuje na osnovu modela širenja signala ionosferom na temelju podataka o gustoći ionosfere koji se šalju u navigacijskoj poruci. Važno je napomenuti kako i elevacija satelita, odnosno debljina ionosferskog sloja utječe na kašnjenje signala. Vrijednosti se kreću od oko 10 ns za satelite s velikom elevacijom do 150 ns za satelite s nižom elevacijom ( $>10^\circ$ ) što je ekvivalenti pseudoudaljenosti od 3 do 45 m.

Nadalje, [2] opisuje kako je teško potpuno izbjeći greške iz razloga dnevnog variranja ukupnog zbroja elektrona koji su van predviđenog modela kompenzacije. Mjerenjem razlika u vremenu prijama na dvije različite frekvencije  $L1$  i  $L2$ , pomoću preciznih prijamnika lako se može izračunati iznos ionosferskog kašnjenja. Skupno kašnjenje inverzno varira o kvadratu frekvencije nositelja što prikazuje sljedeći model za mjerenje pseudoudaljenosti  $L1$  i  $L2$  frekvencija, [2]:

$$\rho_i = \rho \pm \frac{k}{f_i^2}; \quad (2)$$

gdje su:

$\rho$  – pseudoudaljenost bez greške;

$\rho_i$  – mjerena pseudoudaljenost;

$k$  – konstanta koja ovisi o potpunom zbroju elektrona duž propagacijskog puta;

$i$  – 1,2 predstavlja mjerenje  $L1$  i  $L2$  frekvencija;

$\pm$  – odnose se na mjerenje koda ili faze nositelja pri mjerenoj pseudoudaljenosti.

Rješenje za  $\rho$ , za mjerenje udaljenosti pomoću koda odvija se prema sljedećem izrazu danom u [2]:

$$\rho = \frac{f_1^2}{f_1^2 - f_2^2} \rho_1 - \frac{f_2^2}{f_1^2 - f_2^2} \rho_2; \quad (2)$$

gdje su:

$f_1$  i  $f_2$  - frekvencije nosioca;

$\rho_1$  i  $\rho_2$  – pripadajuće izmjerene udaljenosti.

Ako u mjerenja (1) i (2) dodamo i mjerenje faze signala, onda prema [2] izraz postaje:

$$\rho = \frac{f_2^2}{f_1^2 - f_2^2} (\Phi_1 \lambda_1 - \Phi_2 \lambda_2 - (N_1 \lambda_1 - N_2 \lambda_2)); \quad (3)$$

gdje su :

$\lambda$  – valna duljina signala L1 ili L2 (m);

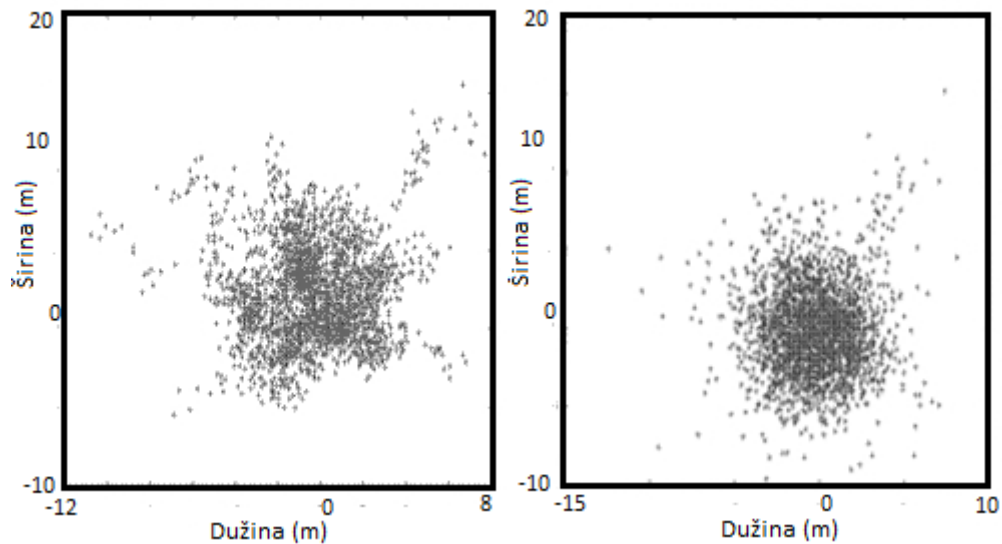
$\Phi$  – izmjerena vrijednost faze signala nositelja;

$N$  – cjelobrojni ambiguitet.

Ova jednadžba ne obuhvaća ionosferske efekte viših redova jer su njihovi utjecaji manji od 1% totalne ionosferske pogreške.

Zaključak je da se ove pogreške uglavnom ispravljaju proračunima u samom prijemniku. Tipične varijacije uzimaju se u obzir u samim izračunima, međutim civilni GPS prijemnici ne mogu utjecati na veće iznenadne pogreške zbog npr. naglih solarnih oluja. Elektromagnetski valovi se usporavaju kroz ionosferu i to na način da se oni s manjom frekvencijom više usporavaju od onih s većom. Veća se točnost postiže pomoću vojnih GPS prijemnika koji istodobno primaju obje frekvencije, pa lako mogu eliminirati pogreške u kalkulacijama.

Slika 4.3 prikazuje razliku, odnosno utjecaj ionosferske pogreške na poziciju, navodi [19]. Na lijevom grafu podaci su prikupljeni pomoću *L1* prijemnika bez ionosferske pogreške, a na desnom je korišten vojni prijemnik koji koristi obje frekvencije istodobno pritom koristeći ionosfersku korekciju.



*Slika 4.3: Raspršenost pozicije zbog ionosferskih utjecaja*

*Izvor: [19]*

Desni graf pokazuje manje raspršenih mjerenja, ali se konačna točnost pozicije u konačnici u 95 % slučajeva znatno ne povećava ispravljanjem ionosferske pogreške. Glavni razlog je umiješanost ostalih pogrešaka.

Važno je napomenuti kako se kod SBAS sustava ionosferski podaci šalju za svaku regiju posebno pa je korekcija pogrešaka još bolja.

## **4.5 Troposferske pogreške**

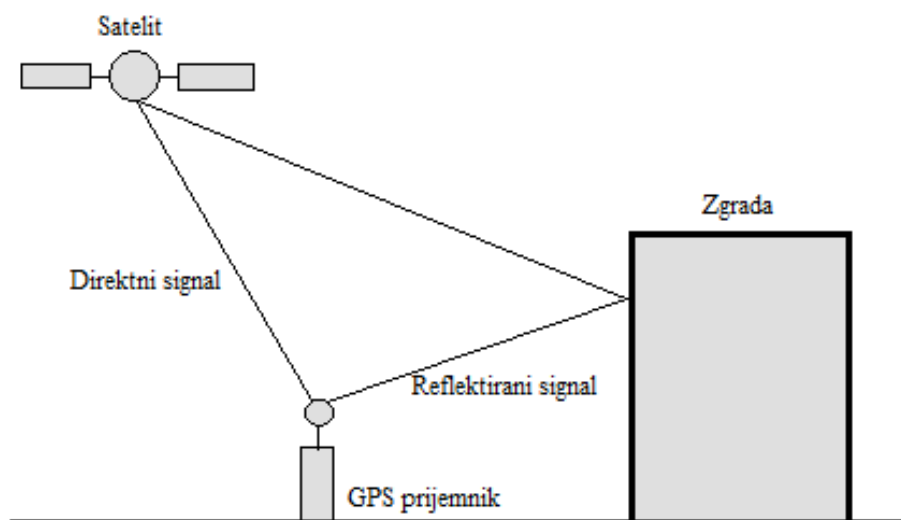
U [2], [20] se navodi da je troposfera niži sloj zemljine atmosfere koji se proteže do 60 km iznad zemljine površine. Sastoji se od vodene pare i različitih plinova. Većina pogreški nastaje propagacijom signala kroz vlažniji dio koji se nalazi u prvih 10 km od zemljine površine. Vlaga utječe na produljivanje propagacijskog puta zbog efekta refrakcije zrake. Ovaj je dio najčešće najteže modelirati zbog velikih varijacija atmosferskih uvjeta odnosno promjenjivih faktora utjecaja kao što su temperatura, vlaga, tlak te elevacija satelita. Važno je napomenuti kako su u svim dijelovima troposfere, u različitim koncentracijama prisutni plinovi poput kisika i dušika koji uzrokuju kašnjenje signala u većoj mjeri, oko 90% ukupne pogreške troposfere. Tipične vrijednosti pogreška, gledano iz položaja prijemnika iznose do 2.3 m zbog plinova i 1-80 cm zbog vlage, te se ukupna pogreška dodatno povećava kako se satelit približava horizontu.



Troposfersko kašnjenje signala nije ovisno o frekvenciji, te je jednako i za kod i za prijenosni signal. Zbog tih se razloga, za mjerenje pogreške koriste modeli ili diferencijalno pozicioniranje. Najčešće se koriste: Hopfieldov model, modificirani Hopfieldov model i Saatamoinenov model. Za niže elevacije satelita, najbolje rezultate daje modificirani Hopfieldov model dok se za satelite iznad 20 stupnjeva svi modeli pružaju približno jednake rezultate. Kao što je ranije rečeno, modeli za utjecaj plinova na kašnjenje signala vrlo su precizni dok modeli za izračun greške zbog vlage u atmosferi daju mnogo lošije rezultate zbog promjenjive prirode.

#### 4.6 Pogreške zbog višestaznog puta signala

Prema [19], do efekta višestaznog puta signala dolazi zbog refleksija satelitskog GPS signala od raznih objekta. To znači da se signali odbijaju od različitih prepreka na njihovom putu kao što su zgrade, kanjoni, planine i sl. Reflektiranom signalu potrebno je više vremena da stigne do prijemnika nego direktnom signalu.

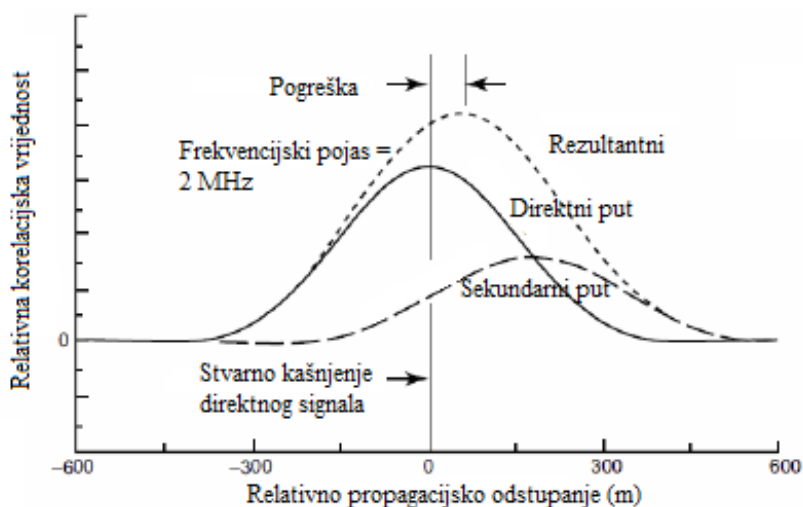


Slika 4.4: Interferencija signala zbog odbijanja od raznih površina

Izvor: Autor prema [19]

Rezultat je pogreška u poziciji koja može biti i nekoliko metara. Ove se pogreške ne mogu eliminirati korištenjem diferencijalnog GPS-a jer ovise o geografskoj okolini antene. Prema [2], može se vršiti procjena kašnjenja na način da se formiraju križno-korelacijske funkcije primljenog valnog oblika s preslikom prenesenog C/A koda, gdje se maksimum

funkcije događa kad se primljeni i replicirani valni oblik signala vremenski poklope. Lokacija vrha funkcije pomaknuta je iz ispravnog položaja pa se mjerenjem pseudoudaljenosti dolazi do pogreške.



Slika 4.5: Prikaz utjecaja odbijenog signala na rezultatni signal

Izvor: [2]

Ovu pogrešku je vrlo teško ukloniti, zato što ne postoji model prema kome bi bilo moguće izračunati pogrešku. Slika 4.5 prikazuje utjecaj odbijenog signala na glavni signal. Naime, postoje različita poboljšanja implementirana u GPS prijammike kao što su uski korlacijski razmaci, MET (*eng. Multipath Elimination Technology*) i MEDLL (*eng. Multipath Estimating Delay Lock Loops*). Najučinkovitiji način uklanjanja ove pogreške je izbjegavanje okružja koje stvara smetnje, odnosno postavljanje antena na lokacije u blizini kojih nema nikakvih struktura.

#### 4.7 Pogreške zbog šuma prijammika

Pod šumom prijammika smatra se svaki šum stvoren od strane prijammika prilikom mjerenja. Prilikom modeliranja najčešće se koristi bijeli šum. U većini slučajeva šum prijammika je manji od 1% valne duljine. Razina šuma za fazu signala nositelja ima maksimalnu standardnu devijaciju 0.8 mm za L1 i 1.3 mm za L2 frekvenciju. Na pogreške zbog prijammika također utječu sat prijammika, termalni šum te programska točnost, opisuje [21].

## 4.8 Pogreške zbog geometrije satelita

Prvi od dva faktora koji utječe na točnost pozicije svakako je određivanje udaljenosti prijamnika od satelita. Drugi vrlo važan faktor je geometrija satelita, koja opisuje poziciju satelita u odnosu jedan prema drugom s gledišta prijamnika.

Prema [19], kao primjer može se navesti situacija kada su minimalno 4 satelita postavljena u istom smjeru (npr. Istok-zapad) koja dovodi do tzv. loše geometrije što može biti uzrok velikoj pogrešci, ili čak nemogućnosti određivanja pozicije. Suprotno, u idealnom slučaju može se pretpostaviti da se 4 satelita nalaze na pozicijama sjever-istok-jug-zapad u razmacima od  $90^\circ$ . U takvim se uvjetima udaljenosti mogu točnije izračunati pa je stoga ovakva konfiguracija optimalna.

Kao što je opisano u [19], ako promatramo dvodimenzionalno odnosno poziciju samo dvaju satelita u odnosu na prijamnik, može se primijetiti kako je bolja situacija kada se sateliti nalaze na pozicijama gdje ih prijemnik može vidjeti u kutu od  $90^\circ$  jedan nasuprot drugom, kao što prikazuje slika 4.6.



Slika 4.6: Prikaz različitih geometrija satelita

Izvor: [19]

Prema slici 4.6, moguće pozicije nalaze se negdje na sivim kružnicama, odnosno točnija pozicija se nalazi na sjecištu tih dviju kružnica (točka A). U drugom slučaju sateliti se mogu nalaziti u liniji s gledišta prijamnika, što doprinosi većoj pogrešci pri izračunavanju pozicije.

U ovom slučaju sjecište mogućih pozicija je mnogo veće i produženo što dovodi do veće greške pozicije. U pravilu GPS prijammnici, osim podataka o broju satelita sadrže i podatak o pozicijama satelita što može dati uvid u točnost pozicije. Kako bi se utvrdila kvaliteta geometrije satelita, uvedena su mjere odstupanja preciznosti (*eng. Dilution Of Precision, DOP*). DOP vrijednosti se izračunavaju iz matrice kovarijanca koje se koriste u GPS pozicioniranju. Kada su GPS sateliti bliže jedan drugome, ne mogu dati precizne informacije kao sateliti široko razmaknuti, pa su u tom slučaju DOP vrijednosti visoke. Suprotno, kada su sateliti razmaknuti DOP vrijednosti su niske. Zaključak je da što su DOP vrijednosti niže točnost pozicije je veća.

DOP vrijednosti, prema [21] dijele se na:

1. GDOP (*eng. Geometric Dilution Of Precision*) – Geometrijsko odstupanje preciznosti predstavlja općenitu točnost gdje su uključene 3D koordinate i vrijeme;
2. PDOP (*eng. Positional Dilution Of Precision*) – Pozicijsko odstupanje preciznosti podrazumijeva pozicijsku točnost u 3D koordinatama;
3. HDOP (*eng. Horizontal Dilution Of Precision*) – Horizontalno odstupanje preciznosti predstavlja horizontalnu točnost u 2D koordinatama;
4. VDOP (*eng. Vertical Dilution Of Precision*) – Vertikalno odstupanje preciznosti predstavlja vertikalnu točnost odnosno točnost visine;
5. TDOP (*eng. Time Dilution of Precision*) – Vremensko odstupanje preciznosti.

Bolja točnost pozicije kako opisuje [19], postiže se kad su vrijednosti HDOP manje od 4, odnosno sve preko 8 je loše. Što su sateliti niže pozicionirani na nebeskom svodu HDOP vrijednosti su bolje, dok se VDOP vrijednosti pogoršavaju kako se sateliti približavaju horizontu. Za točno određivanje pozicije GDOP vrijednosti ne smiju biti manje od 5.

Bitno je spomenuti da se PDOP, HDOP i VDOP vrijednosti nalaze u standardiziranoj NMEA poruci. Sljedeći izrazi prikazuju način na koji se DOP vrijednosti izračunavaju. Prvi korak je prikaz vektora s prijammnika prema satelitu sa svojim komponentama, navodi [2]:

$$\left( \frac{x_i - x}{R_i}, \frac{y_i - y}{R_i}, \frac{z_i - z}{R_i} \right); \quad (4)$$

gdje je udaljenost od prijamnika do satelita izražena preko izraza:

$$R_i = \sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z)^2}; \quad (5)$$

gdje su:  $x$  i  $y$  pozicije prijamnika, a  $x_i y_i z_i$  pozicije satelita. Sljedeći korak podrazumijeva formiranje matrice A koja glasi:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{(x_1 - x)}{R_1} & \frac{(y_1 - y)}{R_1} & \frac{(z_1 - z)}{R_1} & \frac{c}{1} \\ \frac{(x_2 - x)}{R_2} & \frac{(y_2 - y)}{R_2} & \frac{(z_2 - z)}{R_2} & \frac{c}{1} \\ \frac{(x_3 - x)}{R_3} & \frac{(y_3 - y)}{R_3} & \frac{(z_3 - z)}{R_3} & \frac{c}{1} \\ \frac{(x_4 - x)}{R_4} & \frac{(y_4 - y)}{R_4} & \frac{(z_4 - z)}{R_4} & \frac{c}{1} \end{bmatrix}; \quad (6)$$

Elementi 4. retka predstavljaju brzinu svjetlosti, dok elementi prva tri retka predstavljaju komponente vektora od prijamnika do satelita.

Sljedeći korak je izračun matrice Q:

$$Q = (A^T A)^{-1}; \quad (7)$$

gdje su elementi matrice Q:

$$Q = \begin{bmatrix} d_x^2 & d_{xy}^2 & d_{xz}^2 & d_{xt}^2 \\ d_{xy}^2 & d_y^2 & d_{yz}^2 & d_{yt}^2 \\ d_{xz}^2 & d_{yz}^2 & d_z^2 & d_{zt}^2 \\ d_{xt}^2 & d_{yt}^2 & d_{zt}^2 & d_t^2 \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Svi elementi Q matrice strogo su geometrijski pojmovi. PDOP, TDOP, GDOP, HDOP i VDOP prema [2], dani su sljedećim izrazima:

$$PDOP = \sqrt{d_x^2 + d_y^2 + d_z^2}; \quad (9)$$

$$TDOP = \sqrt{d_t^2} = |d_t|; \quad (10)$$

$$GDOP = \sqrt{PDOP^2 + TDOP^2}; \quad (11)$$

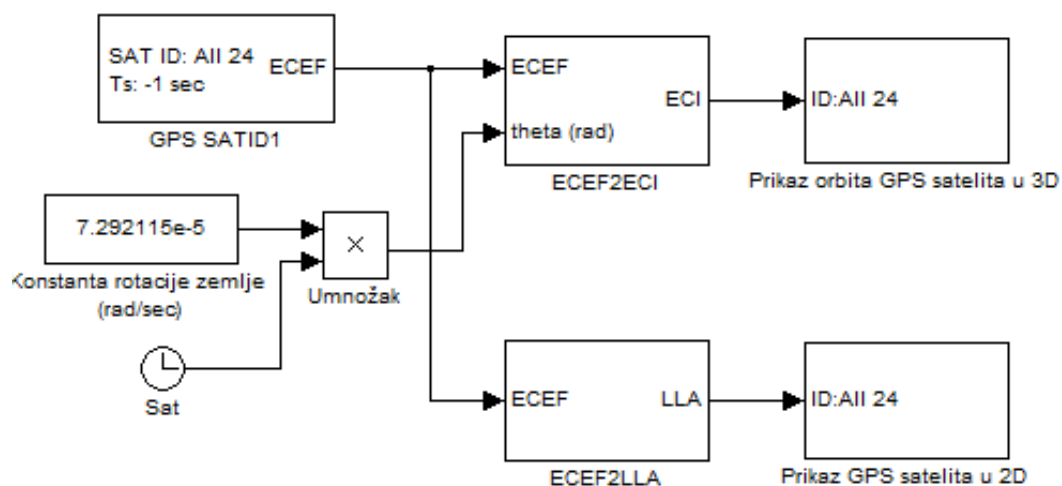
$$HDOP = \sqrt{d_x^2 + d_y^2}; \quad (12)$$

$$VDOP = \sqrt{d_z^2}; \quad (13)$$

#### 4.8.1 Simulacija odstupanja preciznosti

Pomoću programskog paketa Matlab, odnosno aplikacije Simulink, izrađena je simulacija koja prikazuje odnos DOP vrijednosti i pozicije satelita. Kako bi bilo moguće simulirati GPS sustav u Matlabu-u, dodatno su instalirane Simulink skripte odnosno blokovi RapidSTM32 Blockset koji omogućuju izradu GPS simulacija, preuzeti s izvora [22].

Prva simulacija predstavlja putanje satelita na osnovu kojih se kasnije izračunavaju DOP vrijednosti, te je prikazana na slici 4.7.



Slika 4.7: Simulacija putanja satelita

Izvor: Autor prema [22]

Prvi blok omogućuje odabir broja satelita koji sudjeluju u simulaciji, nakon čega simulira ECEF pozicije za odabrane satelite. Simulacijski model predstavlja pojednostavljene cirkularne orbite pri čemu se XYZ ECEF koordinate računaju prema sljedećim formulama, koje su opisane unutar Simulink blokova preuzetih s [22]:

$$x = R[\cos(\theta) \cos(\omega) - \sin(\theta) \sin(\omega) \cos(55)]; \quad (14)$$

$$y = R[\cos(\theta) \sin(\omega) - \sin(\theta) \cos(\omega) \cos(55)]; \quad (15)$$

$$z = R[\sin(\theta) \sin(55)]; \quad (16)$$

gdje su:

$$\theta = \theta_0 + (t - t_0) * \left[ \frac{360}{43082} \right] \text{ deg}; \quad (17)$$

$$= \omega_0 + (t - t_0) * \left[ \frac{360}{86164} \right] \text{ deg}; \quad (18)$$

$$R_E = 26559800.$$

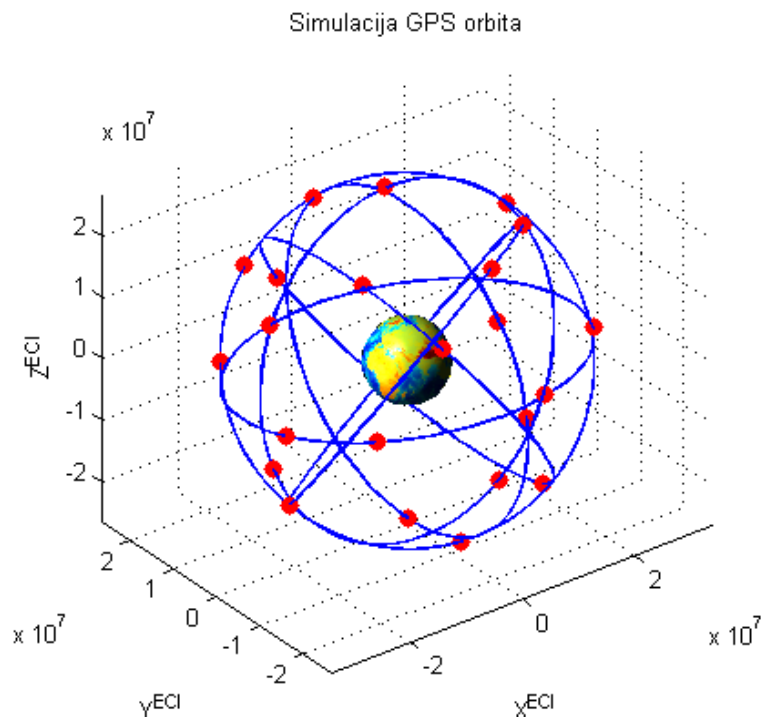
U sljedećem se bloku koordinate iz ECEF sustava transformiraju u ECI sustav (*eng. Earth Centered Inertial*).  $\theta$  predstavlja zemljinu kutnu brzinu u odnosu na inercijalni okvir, a  $t$  predstavlja vrijeme.

Transformacijska matrica iz ECEF u ECI sustav može se opisati kao:

$$R = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (19)$$

Na osnovu ulaznih parametara, koje predstavljaju 3x1 ECEF pozicijski vektor i  $\theta$  u radianima, na izlazu se pojavljuje 3x1 ECI pozicijski vektor. Blok ECEF2LLA pretvara koordinate iz ECEF koordinatnog sustava u geografski koordinatni sustav (*eng. Longitude Latitude Altitude, LLA*) kako bi bilo moguće simulaciju prikazati u 2D prostoru na osnovu koordinata zapisanim pomoću geografske širine i dužine. Kod za pretvaranje ECEF u LLA koordinatni sustav nalazi se u prilogu [C.8].

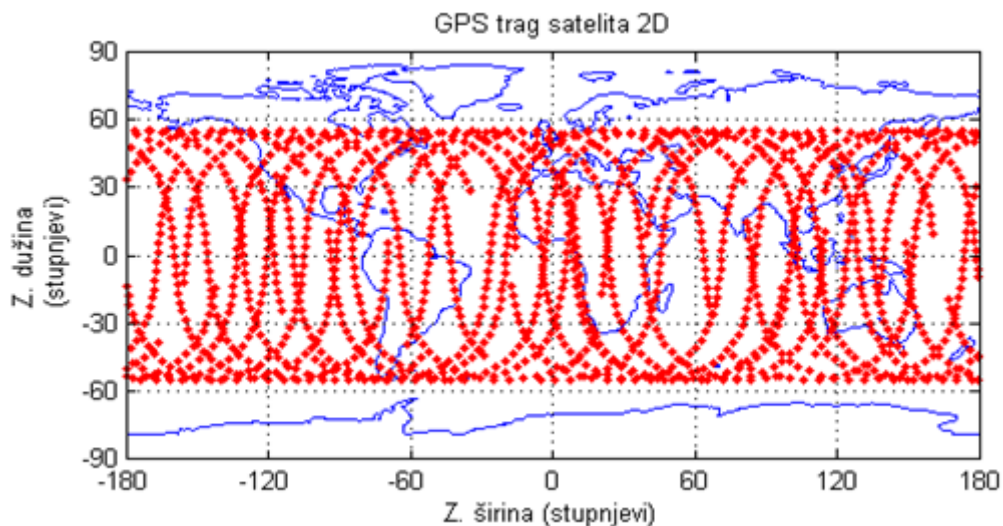
Rezultat simulacije:



Slika 4.8: Simulirane putanje satelita u 3D prostoru

Izvor: Autor prema [22]

Slika 4.8 prikazuje GPS orbite satelita u 3D prostoru na osnovu ECI koordinata te 24 satelita koji se po njima gibaju.



Slika 4.9: Simulirane putanje satelita u 2D prostoru

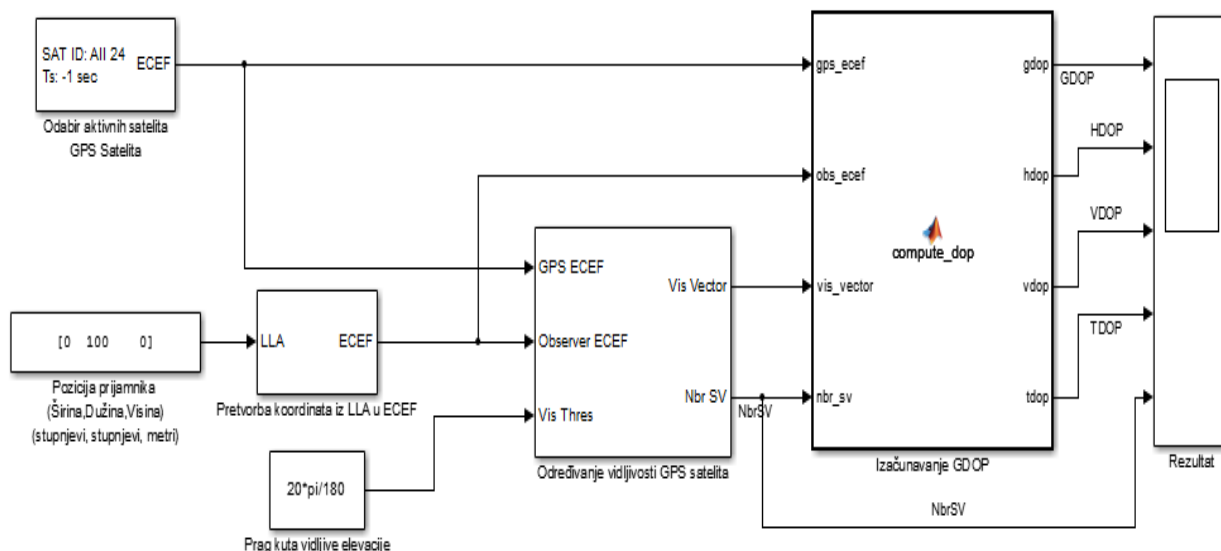
Izvor: Autor prema [22]

Slika 4.9 prikazuje putanje satelita u 2D pogledu na zemljinu površinu. Koriste se koordinate u LLA koordinatnom sustavu. 24 satelita gibaju se po zamišljenim putanjama te se



iz ove simulacije može jasno vidjeti kako je pokrivenost zemljinih polova mnogo manje pokrivena.

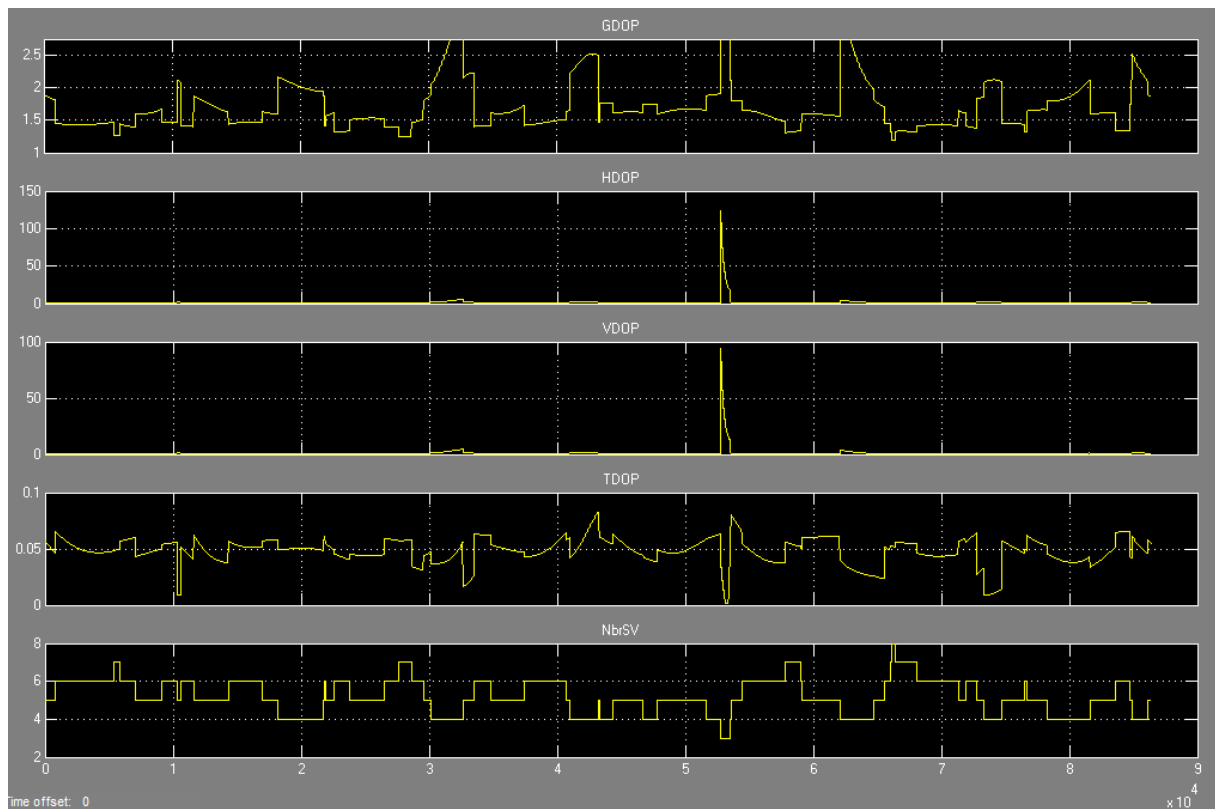
Simulacija prikazana na slici 4.10, prikazuje izračunavanje DOP vrijednosti, te utjecaj pozicije prijemnika i prag kuta vidljivosti na razinu DOP vrijednosti.



Slika 4.10: Simulacija DOP vrijednosti GPS-a

Izvor: Autor prema [22]

Prvi blok omogućuje odabir broja satelita koji sudjeluju u simulaciji. Pomoću bloka pozicija prijamnika postavlja se pozicija prijamnika po zemljopisnoj širini, dužini i visini. Nakon postavki potrebna je pretvorba koordinata u ECEF koordinatni sustav. Od preostala dva bloka prvi simulira putanje satelita, dok se u glavnom bloku izračunavaju DOP vrijednosti.



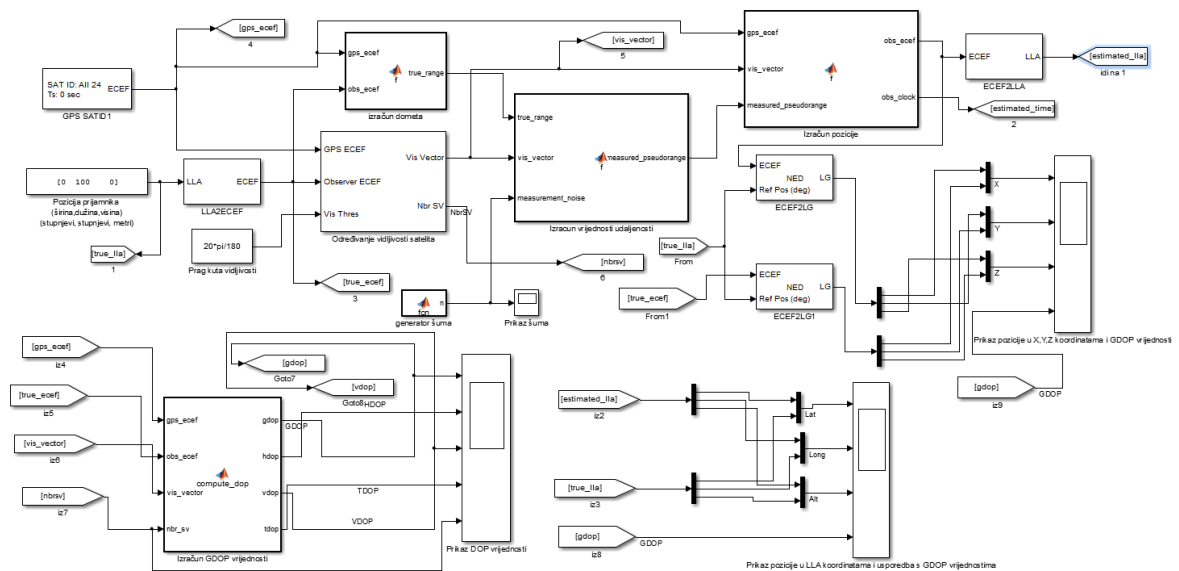
Slika 4.11: Prikaz rezultata simulacije DOP vrijednosti

Izvor: Autor

Slika 4.11 prikazuje simulirane DOP vrijednosti za GPS stanicu Pomorskog fakulteta u Rijeci koja se nalazi na  $45.33048^\circ$  geografske širine i  $14.436469^\circ$  geografske dužine. Iz slike se može primijetiti kako se u trenucima kada postoji manji broj satelita, GDOP vrijednosti povećavaju što znači da postoji veća greška u samoj poziciji.

Nakon pete sekunde simulacije u jednom trenutku se vrijednosti GDOP, HDOP i VDOP vrijednosti povećavaju iz razloga što su u tom razdoblju vidljiva samo 3 satelita. Također, može se zaključiti kako je TDOP vrijednost obrnuto proporcionalna s ostalim DOP vrijednostima.

Sljedeća simulacija, prikazana na slici 4.12, preuzeta s [22], prikazuje ovisnost greške pozicije i DOP vrijednosti na osnovu metode najmanjih kvadrata.

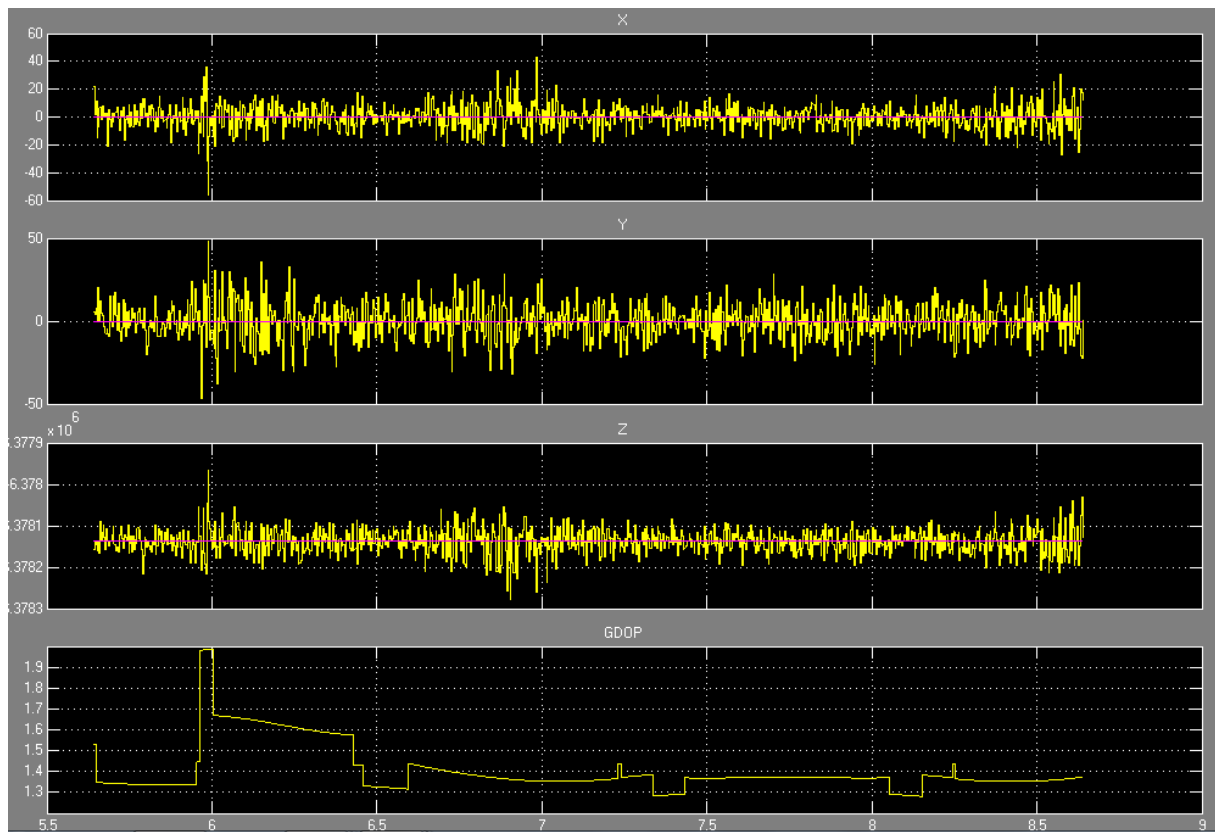


Slika 4.12: Simulacija estimacije pozicije i DOP grešaka

Izvor: [22], Prilog: [A]

Također, i u ovoj su simulaciji postavljene su koordinate GPS stanice Pomorskog Fakulteta u Rijeci :  $45.33048^\circ$  geografske širine i  $14.436469^\circ$  geografske dužine kao prijemna stanica.

U simulaciji postoje 4 izlaza koje je moguće prikazati grafovima. Prvi izlaz kao u prijašnjem slučaju prikazuje izračunate DOP vrijednosti za GPS stanicu u vremenu. Drugi izlaz simulacije prikazuje odstupanje točnosti pozicija u ECEF i u LLA koordinatama s obzirom na GDOP vrijednosti.

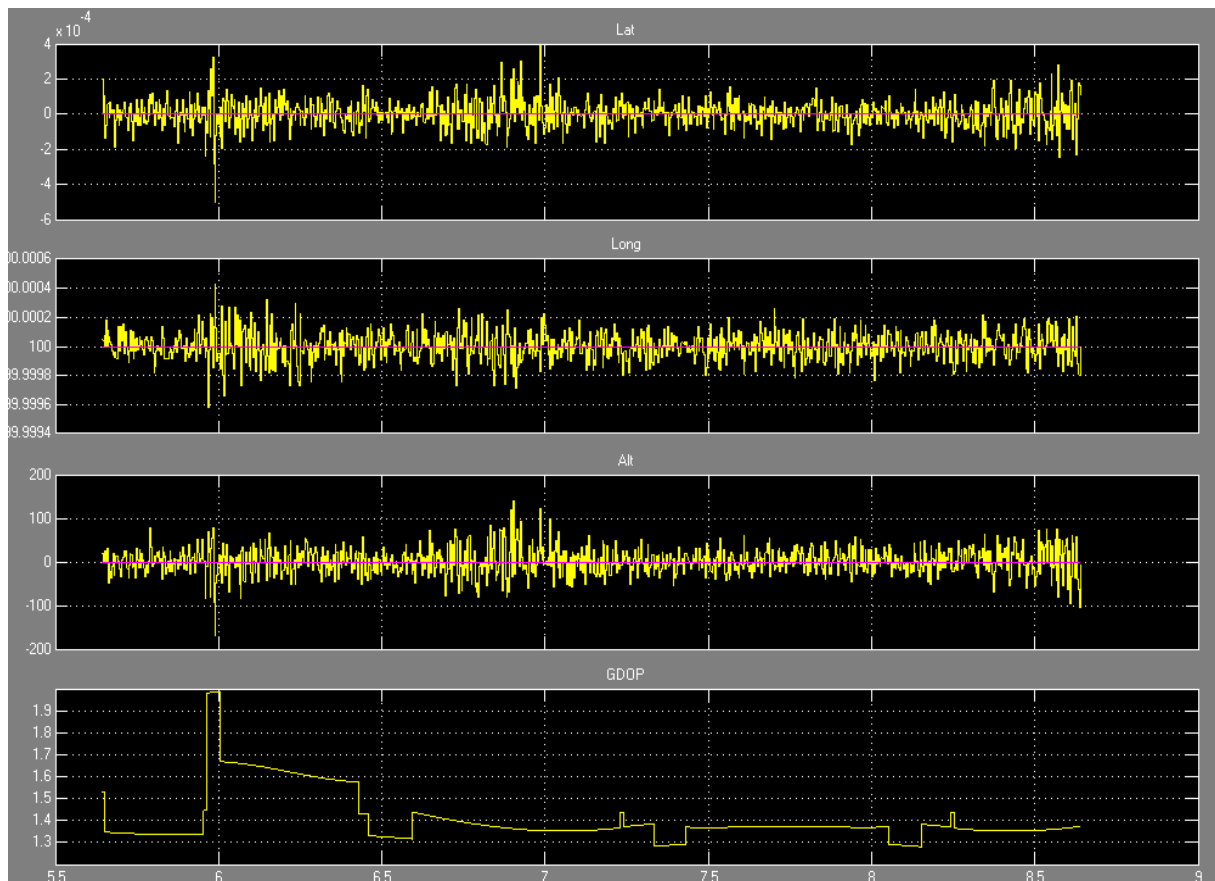


*Slika 4.13: Prikaz greške X,Y,Z koordinata pozicije u odnosu na GDOP vrijednost*

*Izvor: Autor, Prilog: [A.1]*

Slika 4.13 prikazuje ovisnost greške pozicije o GOP vrijednostima kao što je ranije spomenuto. Kako se GDOP povećava, povećava se i greška pozicije, na slici prikazana u metrima.

Slika 4.14 prikazuje utjecaj GDOP vrijednosti na grešku pozicije prikazanu u LLA koordinatama. Koordinate za ovu simulaciju su postavljene na 0 stupnjeva geografske širine i 100 stupnjeva geografske dužine.



Slika 4.14: Prikaz odnosa grešaka pozicije u LLA koordinatama u odnosu na GDOP vrijednosti

Izvor: Autor, Prilog: [A.2]

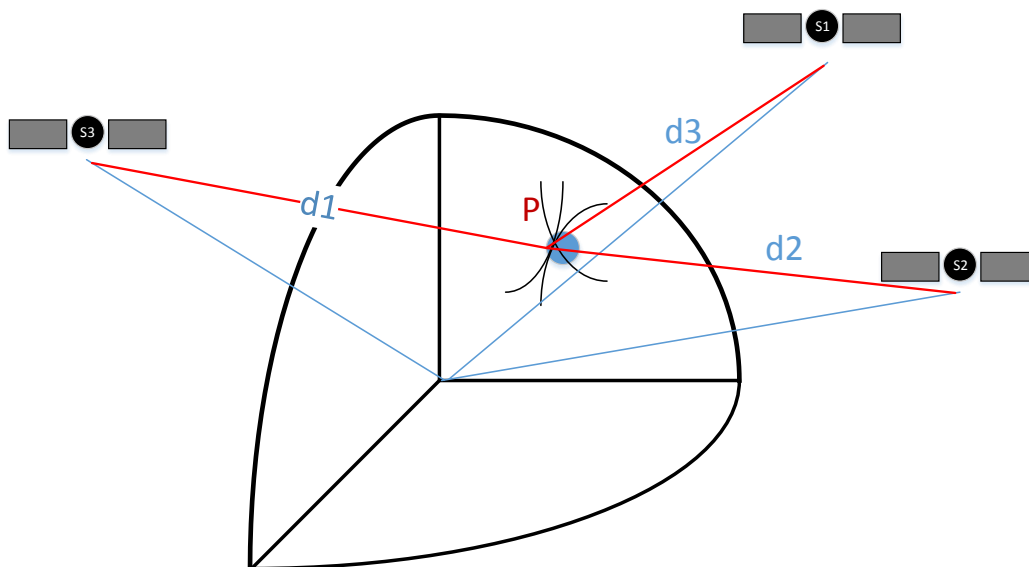
Može se primijetiti kako se na izlazu pojavljuje zašumljena pozicija oko  $0^\circ$  i  $100^\circ$ . Kako se GDOP povećava, povećava se i odstupanje odnosno greška pozicije. U ovom slučaju za dobivanje pozicije koristi se metoda najmanjih kvadrata, dok će se u daljnjem radu prikazati kako postići bolje rezultate estimacije pomoću Kalmanovog filtra.

## 5. ESTIMACIJA POZICIJE GPS PRIJAMNIKA U SUSTAVIMA ZA NAVIGACIJU

### 5.1 Estimacija GPS pozicije metodom vjerojatnosti

Kao što je u prijašnjem poglavlju navedeno, za određivanje GPS pozicije potrebna su 4 satelita ako želimo poziciju pronaći u 3D prostoru, što podrazumijeva da su poznate geografska širina, dužina i visina, odnosno 3 satelita kako bi pronašli poziciju u 2D prostoru gdje su poznate samo geografska širina i dužina. Ovo se često naziva 2D odnosno 3D fix.

Cilj ovog poglavlja je napraviti kod u Matlabu koji će na osnovu poznatih udaljenosti od satelita, te poznate pozicije satelita odrediti poziciju te time prikazati na koji način GPS prijemnik određuje poziciju. Kod u Matlabu za ovu metodu estimacije preuzet je s [23], te je dodatno optimiziran.



Slika 5.1: Određivanje pozicije prijamnika

Izvor: Autor prema [23]

### 5.1.1 Određivanje udaljenosti od satelita

Slika 5.1 prikazuje 3 satelita i prijamnik. Oznake  $d_1$ ,  $d_2$  i  $d_3$  označuju udaljenost prijemnika od svakog satelita. U stvarnosti se ovi razmaci nazivaju pseudoudaljenostima, te se mjere na način da GPS prijamnik na osnovu poznate brzine svjetlosti te vremena potrebnom da signal stigne do prijamnika određuje udaljenost od satelita. Već je poznato da se određivanje pozicije se zasniva na jednadžbama pseudoudaljenosti koje glase:

$$\rho_i = \sqrt{(X_i - x)^2 + (Y_i - y)^2 + (Z_i - z)^2} + c\Delta t; \quad (20)$$

gdje su:

$\rho$  - pseudoudaljenosti bez šuma (na slici pseudoudaljenost je označena sa  $d$ );

$[X_i Y_i Z_i]^T$  - kartzijske koordinate pozicije satelita  $i$ ;

$[x y z]^T$  - kartezijske koordinate pozicije prijamnika;

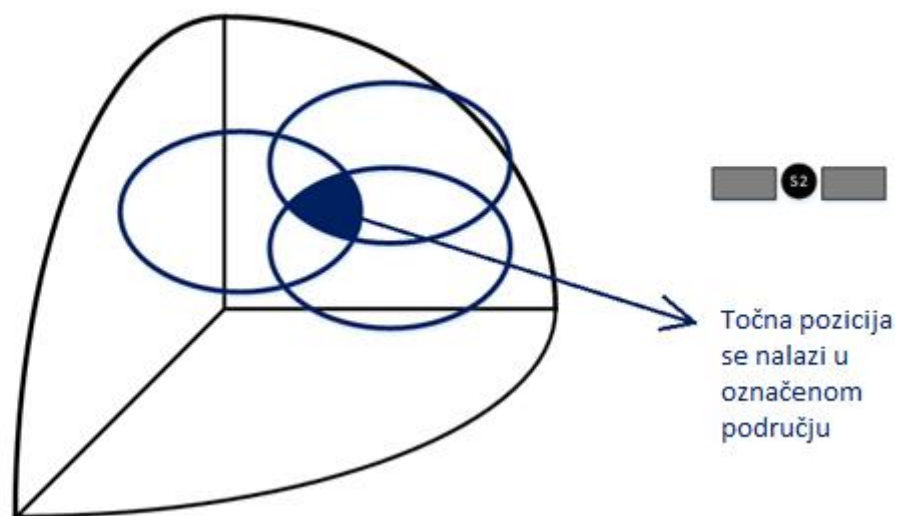
$\Delta t$  - pomak sata prijamnika u odnosu na GPS vrijeme;

$c$  - brzina svjetlosti.

### 5.1.2 Određivanje pozicije metodom vjerojatnosti

Sve točke sa  $d$  udaljenostima od svakog satelita  $i$ , navodi [23], definiraju sferu u svemiru pri čemu se pretpostavlja da je zemlja sferična. Sjecište tih dviju sfera odnosno zemljine sfere i sfere koju čine sve točke s  $d$  udaljenostima od satelita opisuju krug na zemljinoj površini. Ista stvar je i sa satelitima, pa kako znamo točne udaljenosti na osnovu mjerenja vremena ti se krugovi koje stvaraju sateliti i zemlja presijecaju u jednoj točki na zemlji, koja je naša točna pozicija te je na slici označena sa  $P$ .

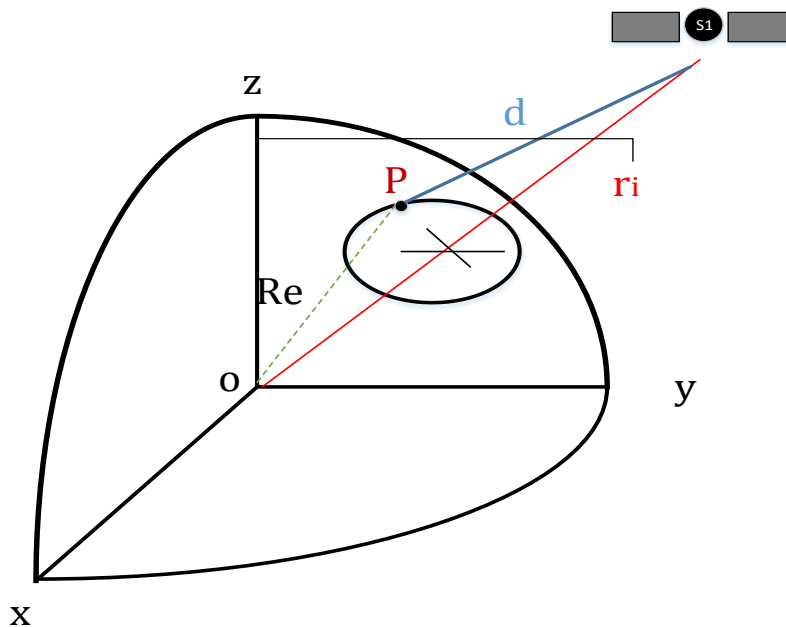
Međutim, problem nastaje već kod mjerenja pseudoudaljenosti zato što je nemoguće precizno odrediti pseudoudaljenost zbog prisutnih šumova. Iz tog razloga ti se krugovi ne presijecaju točno u istoj točki, već svaki krug presijeca drugog u dvije točke. Zbog toga nastaje područje, koje se može vidjeti na slici 5.2 označeno plavom bojom, u kojem negdje leži stvarna pozicija ali nije poznato točno gdje.



Slika 5.2: Područje u kojem se nalazi točna pozicija

Izvor: Autor prema [23]

Iz to će se razloga u ovom primjeru, prema [23], koristiti metoda vjerojatnosti kako bi se estimirala točna pozicija. Usporedno će se izračunati i grešku prilikom estimacije pozicije. Slika 5.3 definiira vrijednosti koje su potrebne u izračunu:



Slika 5.3: Vrijednosti potrebne u izračunu pozicije

Izvor: Autor prema [23]

$P$  – predstavlja lokaciju GPS prijemnika gdje se očitavju izlazi odnosno pozicija;



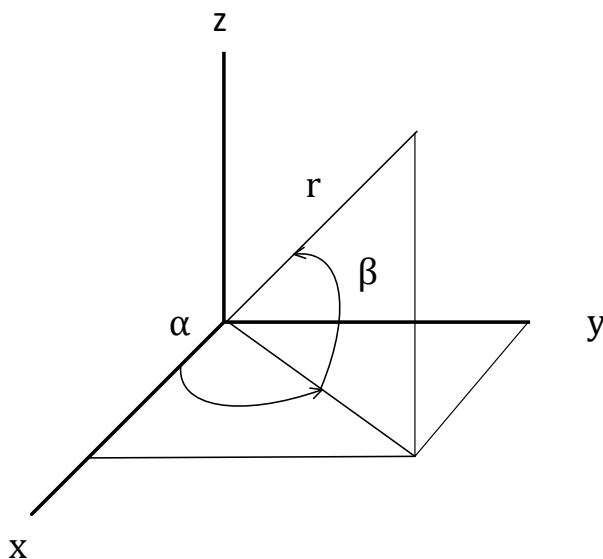
$R_e$  – je radijus zemljine kugle;

$r_i$  – je radijus vektor koji predstavlja udaljenost satelita od ishodišta koordinatnog sustava;

$o$  – je centar zemlje, odnosno centar fiksnog koordinatnog sustava;

$d_i$  – je udaljenost satelita i točke  $P$ , odnosno pseudoudaljenost – u ovom slučaju ona će predstavljati slučajnu varijablu za koju pretpostavljamo da ima normalnu razdiobu s parametrima  $\mu = d_{i0}$ , gdje  $d_{i0}$  predstavlja podatak poslan s satelita i  $\sigma = 50$  m.

Kako bi pomoću kutova i radijusa lakše opisali pozicije satelita, slikom 5.4 dan je sferni koordinatni sustav:



Slika 5.4: Sferni koordinatni sustav

Izvor: Autor prema [23]

gdje su:

$$x = r \cos\beta \cos\alpha \quad (21)$$

$$y = r \cos\beta \sin\alpha \quad (22)$$

$$z = r \sin\beta \quad (23)$$

Kako bi GPS prijemnik mogao izračunati koordinate potrebni su mu sljedeći ulazni parametri, opisuje [23]:

- Radijus zemljine kugle,  $r = R_e$  (s pretpostavkom da je zemlja sfera);
- Pozicija satelita i  $(\alpha_i \beta_i r_i)$  u sfernim koordinatama;
- Udaljenost među satelitima i prijemnika;
- Razdioba vjerojatnosti od  $d_i$  s prije navedenim parametrima.

Prvi korak u rješavanju problema pozicije je određivanje područja presijecanja  $n$  krugova, koristeći poznate pseudoudaljenosti koje emitiraju sateliti. Potrebno je poznavati jednadžbu svakog kruga te presijecanja s zemljinom centrom i radijusom zemljine kugle, te sfere s satelitom i radijusom  $d_{i0}$  kako bi se odredile sve točke koje su za  $d_{i0}$  udaljene od satelita  $i$ .

### 5.1.2.1 Definicija kruga kada se dvije sfere presijecaju

Prema [23], pretpostavlja se da je prva sfera zemljina kugla, a druga sfera je oko satelita  $i$  s radijusom  $d_{i0}$ .

Izrazi (24) i (25) predstavljeni su u kartezijskim koordinatama.

$$r = R_E \quad (24)$$

$$(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2 = d_{i0}^2 \quad (25)$$

Sada je potrebno jednadžbe (24) i (25) pretvoriti u sferne koordinate koristeći supstitucije (21), (22), (23) te sljedeće supstitucije:

$$x_i = r_i \cos\beta_i \cos\alpha_i; \quad (26)$$

$$y_i = r_i \cos\beta_i \sin\alpha_i; \quad (27)$$

$$z_i = r_i \sin\beta_i; \quad (28)$$

gdje kada uvrstimo supstituciju dobije se sljedeći izraz:

$$(r \cos\beta \cos\alpha - r_i \cos\beta_i \cos\alpha_i)^2 + (r \cos\beta \sin\alpha - r_i \cos\beta_i \sin\alpha_i)^2 + (r \sin\beta - r_i \sin\beta_i)^2 = d_{i0}^2; \quad (29)$$

ako sada riješimo kvadrat binoma dobije se:

$$\begin{aligned} r^2 \cos^2\beta \cos^2\alpha - 2r \cos\beta \cos\alpha r_i \cos\beta_i \cos\alpha_i + r_i^2 \cos^2\beta_i \cos^2\alpha_i + r^2 \cos^2\beta \sin^2\alpha \\ - 2r \cos\beta \sin\alpha r_i \cos\beta_i \sin\alpha_i + r_i^2 \cos^2\beta_i \sin^2\alpha_i + r^2 \sin^2\beta \\ - 2r \sin\beta r_i \sin\beta_i + r_i^2 \sin^2\beta_i = d_{i0}^2. \end{aligned} \quad (30)$$

Slijedi:

$$\begin{aligned} r^2 + r_i^2 - 2r r_i (\cos\beta \cos\alpha \cos\beta_i \cos\alpha_i + \cos\beta \sin\alpha \cos\beta_i \sin\alpha_i + \sin\beta \sin\beta_i) \\ = d_{i0}^2; \end{aligned} \quad (31)$$

pa se sada pronalaze sjecišta dviju sfera tako da se izraz (24) uvrsti u (31):

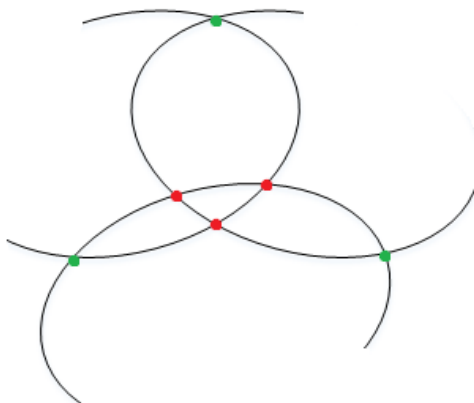
$$R_E^2 + r_i^2 - 2 R_E r_i (\cos\beta \cos\alpha \cos\beta_i \cos\alpha_i + \cos\beta \sin\alpha \cos\beta_i \sin\alpha_i + \sin\beta \sin\beta_i) = d_{io}^2; \quad (32)$$

$$d_{io}^2 = f_i(R_E, \alpha, \beta, r_i, \alpha_i, \beta_i) \quad (33)$$

Sada koristeći jednadžbe dvaju krugova nalazimo sjecišta:

$$d_{io}^2 = f_i(R_E, \alpha, \beta, r_i, \alpha_i, \beta_i) \quad (34)$$

$$d_{jo}^2 = f_j(R_E, \alpha, \beta, r_j, \alpha_j, \beta_j) \quad (35)$$

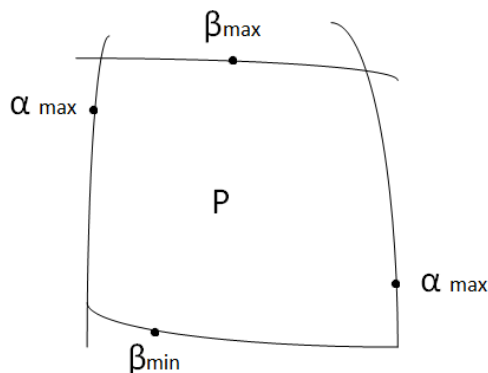


Slika 5.5: Sjecišta krugova

Izvor: Autor

Naravno, ako postoji  $n$  satelita odnosno  $n$  krugova postoji i  $n(n - 1)$  točaka sjecišta. Na slici 5.5 su zelenom bojom označene točke koje nisu potrebne u izračunu. To se izvodi na način da se proračunava udaljenost tih točaka od centra kruga pa u slučaju kada je udaljenost veća od dijametra kruga automatski se te točke zanemaruju. Rezultat svih proračuna su dobivene granice unutar kojih negdje leži prava pozicija P (unutar tijela kojeg čine 3 crvene točke na slici 5.5).

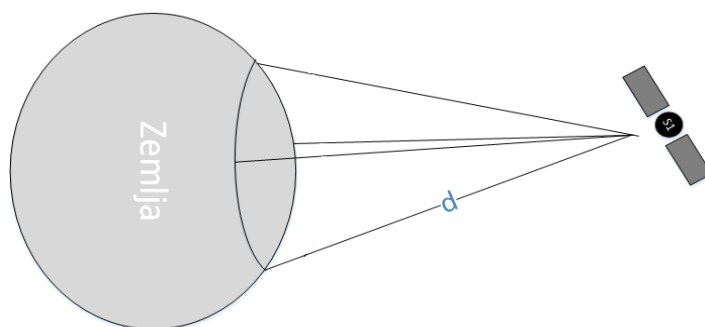
Za svaku od tih točaka, postoje različiti kutovi  $\alpha, \beta$ . Sljedeći korak podrazumijeva nalaženje maksimalnih i minimalnih vrijednosti tih kutova kako bi se dobio pravokutnik oko točke P.



Slika 5.6: Minimalni i maksimalni  $\alpha$  i  $\beta$  kutovi

Izvor: Autor prema [23]

Bitno je napomenuti kako su  $\alpha$ ,  $\beta$  u svakom krugu stvorenom od strane satelita ovisni jedan o drugom, pa će tko svi  $\alpha$ ,  $\beta$  parovi imati istu vjerojatnost od  $d$ . Stoga će vjerojatnost pozicije biti produkt vjerojatnosti pseudoudaljenosti između točke  $P$  i svih satelita, što prikazuje slika 5.7.



Slika 5.7: Produkt vjerojatnosti pseudoudaljenosti

Izvor: Autor prema [23]

Prema [23], izrađen je kod u Matlabu koji će za upisane podatke o satelitima izračunati, odnosno estimirati poziciju metodom vjerojatnosti. Cijeli kod napisan u Matlabu nalazi se u prilogu [B]. Kao što je navedeno u [23], ulazne vrijednosti za simulaciju su:

Tablica 5.1.1: Ulazni podaci za simulaciju estimacije pozicije metodom vjerojatnosti

Izvor:[23]

	SAT. 1	SAT. 2	SAT. 3	SAT. 4	SAT. 5
Visina (m)	20243200	20197500	20161500	20101700	20142400
$\alpha$ (°)	25.6	- 42.2	53.8	97.4	1.8
$\beta$ (°)	9	43.3	24.9	3.3	35.8
d – mjerena udaljenost	15237610	16945900	14713650	19075230	14427730
Stvarna udaljenost	15237604	16945895	14713601	19075178	14427708

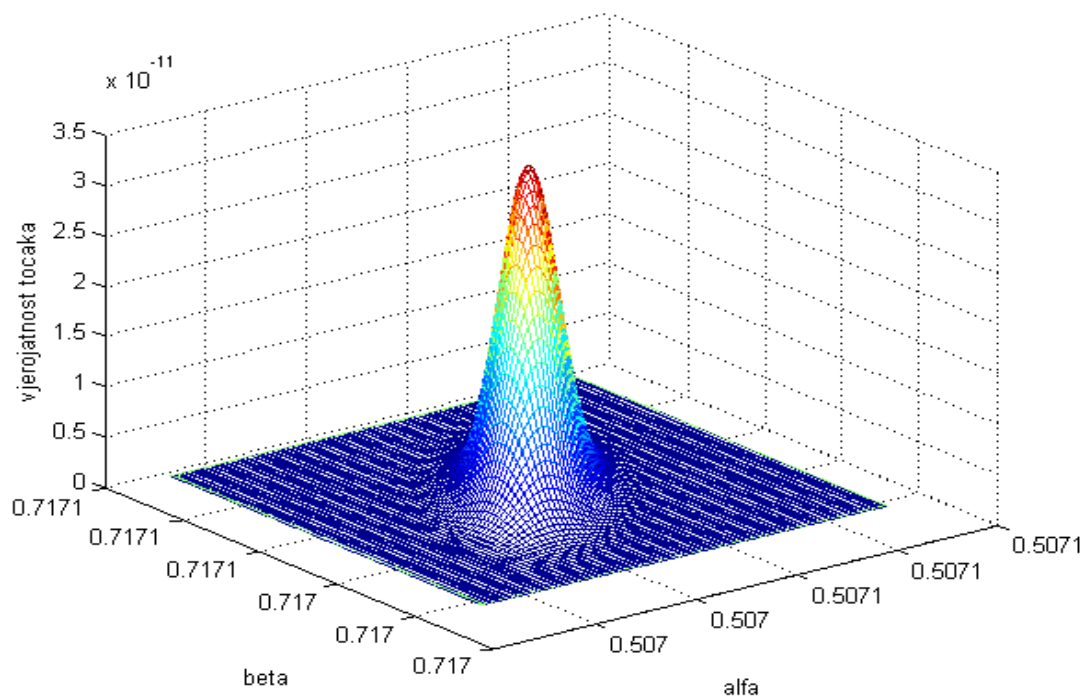
Prilikom pokretanja simulacije unosi se stvarna pozicija kako bi se mogla usporediti s dobivenom estimacijom:

Tabela 5.1.2 : Usporedba stvarne i estimirane pozicije

Izvor: Autor prema [23]

STVARNA POZICIJA	ESTIMIRANA POZICIJA
41.0835° Sjeverno	41.0835739293942° Sjeverno
29.0523611° Istočno	29.05011772418028 ° Istočno
GREŠKA ESTIMACIJE	
6.451908e+01	

Također, moguće je i prikazati raspodjelu vjerojatnosti točaka na osnovu  $\alpha$  i  $\beta$  kutova.



Slika 5.8: Raspodjela vjerojatnosti  $\alpha$  i  $\beta$

Izvor: Autor

Međutim, može se primijetiti kako greška ovisi o sigmi postavljenoj za normalnu distribuciju, navodi [23], zbog čega se greška povećava prilikom korištenja drugih vrijednosti sigma. Također, vrlo je teško pronaći područje u kojem se nalazi točka P pošto su jednadžbe implicitne pa se rješavaju iterativnim postupcima.

Zaključak je da je ova metoda samo teoretska te da u stvarnosti, kada su prisutni šumovi ne bi pružala najbolje rezultate. Iz tog se razloga često koristi Kalmanov filter pri određivanju pozicije o čemu će biti riječ u sljedećem poglavlju.

## 5.2 Estimacija pozicije pomoću Kalmanovog filtra

Linearni Kalmanov filter (*eng. Linear Kalman Filter, LKF*), poznat i pod kraticom LQE (*eng. Linear quadratic estimation*) je matematički algoritam koji koristi serije mjerenja u vremenu koje sadrže šum te ostala onečišćenja prilikom mjerenja, navodi [9]. Rezultat LKF-a je estimacija nepoznatih varijabli. LKF djeluje rekurzivno na ulazna zašumljena mjerenja kako bi na izlazu proizveo statistički optimalni estimat na osnovu stanja sustava. Nazvan je prema Rudolfu Emilu Kalmanu koji je 1960.g objavio popularni rad gdje objašnjava

rekurzivnu opciju filtriranja linearnih diskretnih sustava, čime je postao prvi tvorac teorije ovog filtra, [23]. KF se koristi u mnogim područjima kao što su navođenje, navigacija i kontrola raznih objekata. Također, često se koristi u raznim procesiranjima signala i ekonometriji.

Prema [2], [10], [11] algoritam LKF-a radi u 2 koraka. Prvi korak podrazumijeva predikciju, odnosno KF estimira trenutne varijable stanja, kao i one nepoznate varijable. Kada se izmjeri vrijednost sljedećeg mjerenja (koje je zašumljeno), estimati se korektiraju koristeći težinsku sredinu, čime se veća težina daje estimatu s većom točnošću. Vrlo važna stvar je da LKF može raditi u stvarnom vremenu (*eng. Real-time*), koristeći na ulazu samo mjerenje i prethodno izračunato stanje, a na izlazu može estimirati i vrijednosti koje nisu mjerene.

LKF za svoj rad uvijek mora imati definiran linearni dinamički sustav, a sve greške, šumovi i mjerenja moraju imati Gaussovu distribuciju. Također, postoji više inačica LKF-a kao što su nelinearne verzije: nederivirajući KF (*eng. Unscented Kalman Filter, UKF*) i prošireni (*eng. Extended Kalman Filter, EKF*) koji će se kasnije i koristiti u primjeru estimacije GPS pozicije.

Kao što je ranije navedeno, LKF koristi dinamički model sustava, gdje su poznati kontrolni ulazi sustava te razna sekvencijalna mjerenja dobivena iz senzora, kako bi se dobio estimat stanja sustava koji je bolji u odnosu na estimat dobiven samo jednim mjerenjem. Kod LKF-a spominje se i Kalmanovo pojačanje koje je funkcija relativne točnosti mjerenja i trenutnog estimata stanja. Može se podešavati kako bi se postigle određene performanse. Što je pojačanje veće, filter postavlja više težine na mjerenja, a s manjim pojačanjem filter bolje prati model predikcije.

Prilikom kalkulacija, svi estimati stanja i kovarijance zapisani su u matricama kako bi bilo omogućeno baratanje s više dimenzija u jednom setu kalkulacija. To omogućuje predstavljanje linearnih veza između različitih varijabla stanja u bilo kojem prijelaznom modelu ili kovarijanci.

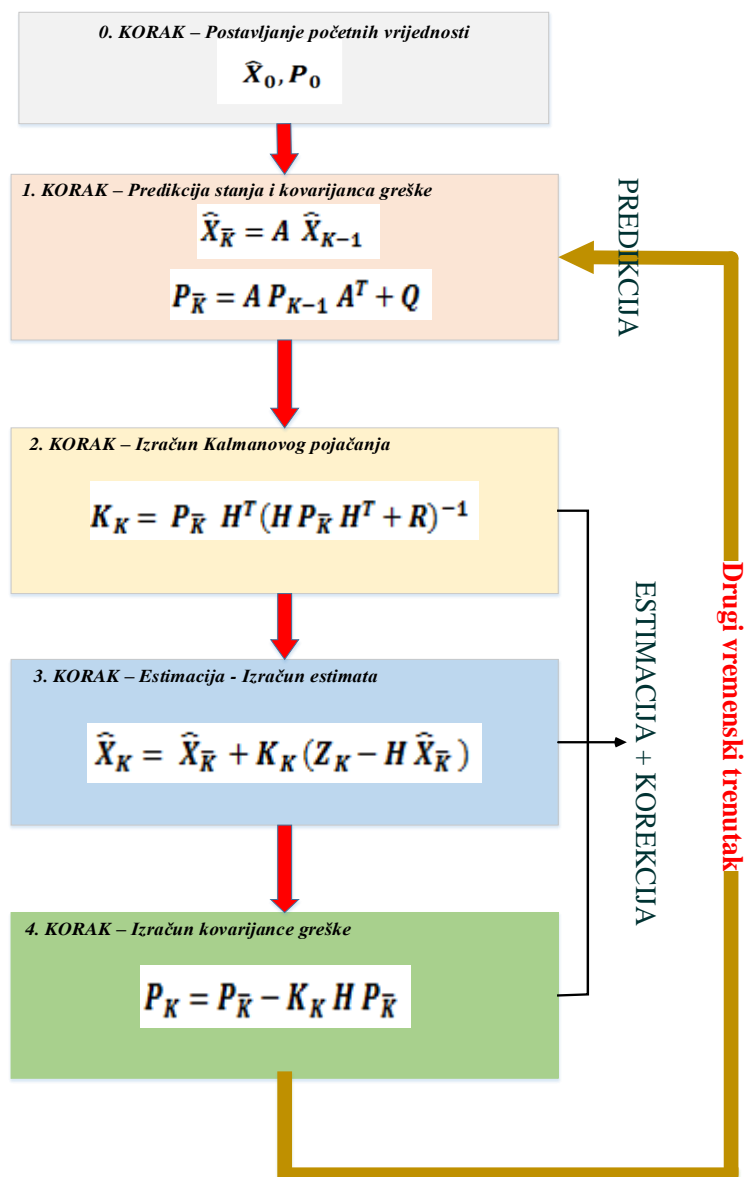
Prema [2], kao jednostavan primjer korištenja LKF može se navesti slučaj gdje je potrebno odrediti preciznu lokaciju broda pomoću GPS sustava. Brod je opremljen GPS prijemnikom koji može estimirati poziciju s točnošću od nekoliko metara. Normalno je da je GPS estimat pun šumova, pa očitavanja „šeću“ u krugu od nekoliko metara od prave pozicije. Kako brod kao i sva tijela slijede zakone fizike, pozicija može biti estimirana integriranjem brzine u vremenu kojom se brod kreće. Ova se tehnika naziva (*eng. Dead reckoning*) te se

pomoću nje može dobiti prilično dobra estimacija pozicije broda. KF bi i u ovom primjeru radio u dva koraka: predikcija i korekcija gdje bi u fazi predikcije stara pozicija broda bila korektirana s obzirom na zakone gibanja (dinamički model). Osim što se izračunava nova estimacija pozicije, izračunava se i nova kovarijanca. U sljedećem koraku korekcije mjerenje pozicije broda uzima se iz GPS uređaja gdje zajedno s tim mjerenjem dolazi do određene netočnosti. Kovarijanca mjerenja relativna u odnosu na predikciju iz prethodnog koraka određuje koliko će novo mjerenje utjecati na korekciju predikcije. U slučaju da se osnovu dead reckoning estimacije počne pojavljivati veće odstupanje, GPS mjerenje preuzima te estimira poziciju blizu realne pozicije.



### 5.2.1 Algoritam Kalmanovog filtra

Kako bi se što jasnije objasnio rad LKF-a na slici 5.9 prikazan je KF algoritam.



Slika 5.9: Algoritam KF-a

Izvor: Autor prema [9], [10], [12]

gdje je značenje varijabli prikazano sljedećom tablicom:

Tablica 5.2.1: Kategorizacija varijabli KF-a

Izvor: [10]

Vanjska ulazna varijabla – (mjerenje)	$Z_K$
Izlazna varijabla iz LKF-a – (estimat)	$\hat{X}_K$
Dinamika sustava (state space)	$A, H$
Procesni šum, Šum mjerenja	$Q, R$ (matrice kovarijanci šuma)
Unutarnje (procesne) varijable	$\hat{X}_{\bar{K}}, P_{\bar{K}}, P_K, K_K$

Potrebno je napomenuti kako varijable stanja  $A, H, Q, R$  moraju biti definirane prije implementacije u LKF te predstavljaju karakteristike sustava bez kojih LKF ne može funkcionirati. Također performanse LKF direktno ovise o matricama  $A, H, Q$  i  $R$ , pa ako je potrebno poboljšati performanse LKF-a prvenstveno treba poraditi na ovim matricama. Sve ostale varijable nije moguće zasebno mijenjati veću su dio KF algoritma.

Kao što se može vidjeti iz slike algoritma, postoje 4 koraka u kojima LKF izvodi kalkulacije:

- **0. Korak** – Izvodi se samo jednom na početku. Služi za postavljanje početnih vrijednosti;
- **1. Korak - Predikcija**  
Predstavlja predikciju gdje se izračunavaju varijable  $\hat{X}_{\bar{K}}$  i  $\hat{P}_{\bar{K}}$  koje se kasnije koriste u koracima 2.-4. Varijable koje sadrže crticu iznad indeksa su one varijable čije se vrijednosti predviđaju. U ovom se koraku u kalkulacijama koristi  $A$  matrica pa je tako ovaj korak najviše povezan s dinamikom sustava;
- **2. Korak – Izračun Kalmanovog pojačanja**  
Varijabla  $P_{\bar{K}}$  iz 1. Koraka se koristi zajedno s matricama  $H$  i  $R$  (čije su vrijednosti definirane van algoritma). Matrice  $A, H, Q, R$  moraju biti poznate unaprijed;
- **3. Korak – Izračun estimata**  
Izračunavanje  $\hat{X}_K$  na temelju mjerenja  $Z_K$  koji se dovodi kao ulazna varijabla. Ovaj je korak najbliži s LP filtrom;
- **4. Korak – Izračun kovarijance greške**  
Izračunava se kovarijanca greške (greška predikcije) koja predstavlja mjeru koja ukazuje na točnost estimata iz prethodnog koraka. U ovom se koraku odlučuje uzima li se estimat iz prethodnog koraka u obzir ili se odbacuje.

Kao što ranije u tekstu navedeno rad KF moguće je podijeliti na dva dijela, opisuje [11]:

- **PREDIKCIJA**

Podrazumijeva 1. korak algoritma gdje se estimat  $\hat{X}_{K-1}$  i  $P_{K-1}$  iz prethodnog vremenskog trenutka  $t_{k-1}$  koriste kao unutarnje ulazne varijable za predikciju ovih dviju varijabli u trenutnom vremenskom trenutku  $t_k$  odnosno za predikciju varijabli  $\hat{X}_{\bar{K}}$  i  $P_{\bar{K}}$  gdje se kasnije ove varijable koriste za estimaciju;

- **ESTIMACIJA**

Ovom dijelu pripadaju koraci od 2. – 4. . Rezultat estimacije su vrijednosti  $\hat{X}_K$  i kovarijanca greške  $P_K$ . Kompenzacija između mjerenja i predikcije uz izračun novog estimata  $\hat{X}_K$  i nove kovarijanca greške dio je procesa estimacije.

### 5.2.2 Proces estimacije u Kalmanovom filtru

Prema [10], kako bi se na najlakši način predstavio proces estimacije potrebno je napraviti usporedbu s niskopropusnim filtrom (eng. Low pass, LP).

#### IZRAČUN ESTIMATA:

$$\hat{X}_K = \hat{X}_{\bar{K}} + K_K (Z_K - H \hat{X}_{\bar{K}}); \quad (36)$$

gdje je  $\hat{X}_K$  estimirana vrijednost,  $\hat{X}_{\bar{K}}$  predviđena vrijednost a  $Z_K$  izmjerena vrijednost. Dalje, ako pomnožimo zagradu dobije se izraz:

$$\hat{X}_K = \hat{X}_{\bar{K}} + K_K Z_K - K_K H \hat{X}_{\bar{K}}. \quad (37)$$

Nadalje, uz pretpostavku da je  $H = I$  odnosno jedinična matrica izraz postaje:

$$\hat{X}_K = \hat{X}_{\bar{K}} + K_K Z_K - K_K I \hat{X}_{\bar{K}}; \quad (38)$$

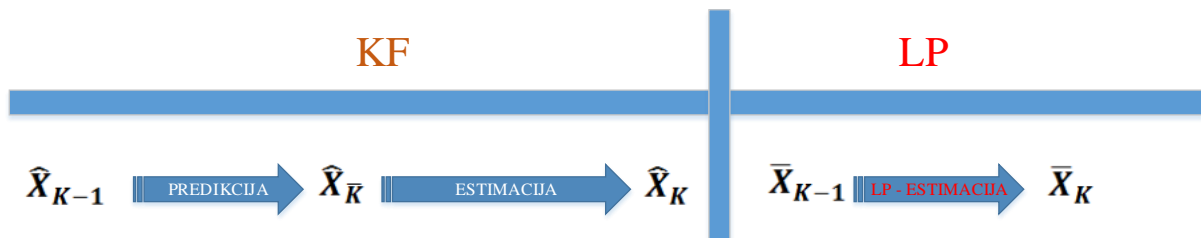
gdje nakon sređivanja izraz postaje:

$$\hat{X}_K = (1 - K_K) \hat{X}_{\bar{K}} + K_K Z_K. \quad (39)$$

Ako sada usporedimo s jednačbom LP filtra prvog reda:

Kalmanov filter	$\hat{X}_K = (1 - K_K) \hat{X}_{\bar{K}} + K_K Z_K$
LP filter 1. reda	$\hat{X}_K = (1 - K_K) \hat{X}_{K-1} + K_K Z_K$

može se primijetiti da LP filtar izračunava estimat  $\hat{X}_K$  otežavanjem prethodnog estimata  $\hat{X}_{K-1}$  i mjerenja  $X_K$ . Razlika kod LKF-a je u tome što ne koristi prethodni estimat, već predikciju što se može ilustrirati slikom 5.10:



Slika 5.10: Usporedba KF-a i LP filtra

Izvor: Autor prema [10]

LP filtar u stvarnosti nije tako sličan LKF-u jer je LKF-u potrebno da ima predikciju od  $\hat{X}_K$  u prethodnom koraku i mjerenje  $Z_K$  u tom vremenskom trenutku što ga čini rekurzivnim filtrom. Potrebno je i Kalmanovo pojačanje koje služi kao težinski faktor u 3. koraku za izračun novog estimata. Kod LP filtra težinski faktor bio je zadan unaprijed pa ga nije bilo potrebno izračunavati u svakom koraku. Kod LKF-a se ovaj težinski faktor izračunava u svakom sljedećem koraku, odnosno težinski faktor se prilagođava u svakom trenutku.

#### KOVARIJANCA GREŠKE:

Predstavlja korak 4. gdje se izraz:

$$P_K = P_{\bar{K}} - K_K H P_{\bar{K}}; \quad (40)$$

izračunava i šalje u 1. korak kao  $P_{\bar{K}+1}$ , pa postaje:

$$P_{\bar{K}+1} = A P_K A^T + Q; \quad (41)$$

Kovarianca greške ukazuje na razliku između estimata (od strane LKF-a) i stvarne ali u tom trenutku nepoznate vrijednosti  $X_K$ . Drugim rječima predstavlja stupanj točnosti estimata, pa što je  $P_K$  veći greška estimata je veća. Kako slučajna varijabla prati Gaussovu distribuciju:

$$X_K = N(\hat{X}_K, P_K) \quad (42)$$

sa sredinom  $\hat{X}_K$  i kovarijancom  $P_K$ , gdje kovarijanca predstavlja mjeru koja ukazuje koliko se neke dvije slučajne varijable mijenjaju zajedno. LKF izračunava distribuciju estimata varijable  $X_K$  i odabire onaj s najvećom vjerojatnošću da je to pravi estimat. Drugim riječima kovarijanca greške je sredina kvadrata greške estimata.

### 5.2.3 Proces predikcije u Kalmanovom filtru

Proces predikcije se sastoji u predviđanju estimata s obzirom na promjenu vremena. Drugim riječima predviđa se koju će vrijednost imati estimat u sljedećem trenutku  $t_{k+1}$ , navodi se u [10].

Predviđanje estimacije u trenutku  $t_{k+1}$ :

$$\hat{X}_{\bar{K}} = A \hat{X}_{K-1} \Rightarrow \hat{X}_{\bar{K}+1} = A \hat{X}_{\bar{K}}; \quad (43)$$

odnosno:

$$P_{\bar{K}} = A P_{K-1} A^T + Q \Rightarrow P_{\bar{K}+1} = A P_{\bar{K}} A^T + Q; \quad (44)$$

gdje su vrijednosti:

- $\hat{X}_K$  izračunat u 3. koraku;
- $P_K$  izračunat u 4. koraku;
- $A, Q$  su definirani tijekom modeliranja sustava;
- $H, R$  ne koriste se u predikciji već samo u estimaciji.

### RAZLIKA IZMEĐU PREDIKCIJE I ESTIMACIJE

Ponovo je za usporedbu prikazano izračunavanje estimata kod LP filtra koje se vrši bez međukoraka, odnosno vrši se direktno preko prethodnog estimata  $\bar{X}_{K-1}$  što znači da se ne primjenjuje nikakva varijacija na prethodni estimat tijekom njegove propagacije iz prethodnog vremenskog trenutka u sadašnji trenutak.  $\bar{X}_{K-1}$  iz trenutka  $t_{k-1}$  uzima se onakav kakav je za izračun u sljedećem trenutku  $t_k$ , [10].

Izračun estimata u LKF-u:

$$\hat{X}_K = \bar{X}_{\bar{K}} + K_K (Z_K - H \bar{X}_{\bar{K}}) \quad (45)$$

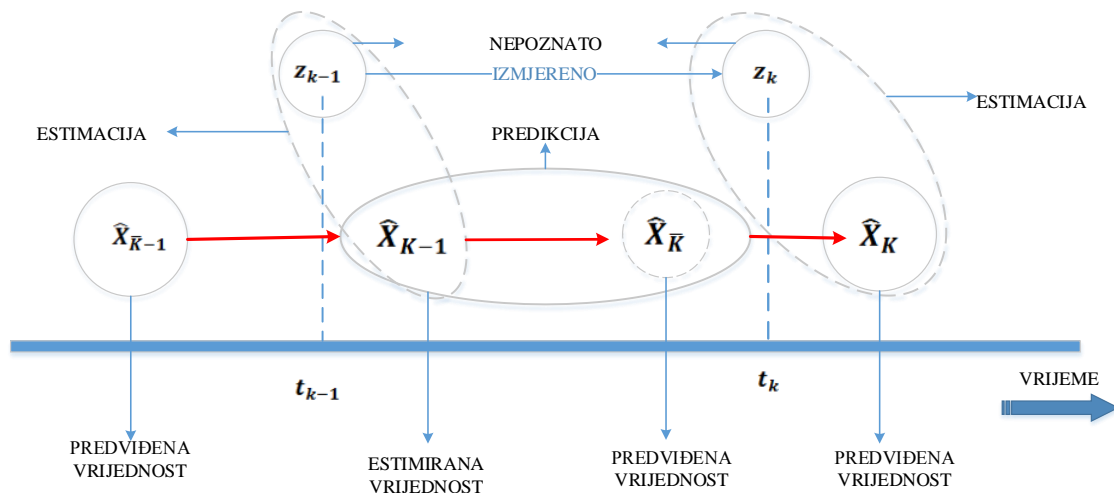
izrazu (45) ne može se direktno primijetiti estimat iz prethodnog koraka  $\hat{X}_{\bar{K}-1}$ , ali se umjesto njega vidi predikcija u realnome vremenu  $\hat{X}_{\bar{K}}$ . Upravo se ova predikcija  $\hat{X}_{\bar{K}}$  dobiva iz estimata iz prethodnog trenutka  $\hat{X}_{\bar{K}-1}$ :

$$\hat{X}_{\bar{K}} = A \hat{X}_{\bar{K}-1}; \quad (46)$$

gdje se smatra da je  $\hat{X}_{\bar{K}}$  moguće zapisati kao  $\hat{X}_{K-1}$ ;

$$\hat{X}_K = A \hat{X}_{\bar{K}-1} + K_K (Z_K - H A \hat{X}_{\bar{K}-1}); \quad (47)$$

gdje za razliku od LP filtra, LKF sadrži još jedan korak više. Upravo zbog ovog međukoraka naziva se **a priori estimat** a sam estimat se naziva **a posteriori estimat**.



Slika 5.11: Grafički prikaz rada KF-a u vremenskim trenucima

Izvor: Autor prema [10]

Estimacija se vrši unutar vremenskog trenutka, a predikcija propagira vrijednost iz jednog trenutka u drugi. Za razliku od LP filtra estimat iz prethodnog trenutka mijenja svoju vrijednost u neku drugu. Posljedica je da u istom trenutku postoje dvije različite vrijednosti  $\hat{X}_{\bar{K}}$  i  $X_K$ , odnosno  $\hat{X}_{\bar{K}-1}$  i  $X_{K-1}$  s time da je izlazna vrijednost  $X_K$ .

Rezultat izraza koji se nalazi u koraku predikcije:

$$\hat{X}_{\bar{K}} = A \hat{X}_{K-1}; \quad (48)$$

reflektira se na performanse LKF-a u koraku izračuna estimata:

$$\hat{X}_K = \hat{X}_{\bar{K}} + K_K (Z_K - H \hat{X}_{\bar{K}}); \quad (49)$$

gdje dio izraza  $H \hat{X}_{\bar{K}}$  predstavlja predviđeno mjerenje odnosno predikciju mjerenja. Nadalje zbog toga izraz  $Z_K - H \hat{X}_{\bar{K}}$  predstavlja razliku između stvarnog mjerenja  $Z_k$  i predviđenog mjerenja, odnosno grešku predikcije mjerenja. Na temelju toga može se zaključiti kako LKF izračunava konačni estimat odgovarajućom kalibracijom predikcije varijable stanja i greške predikcije mjerenja. Kalmanovo pojačanje predstavlja težinski faktor te kalibracije. Ukoliko je predikcija netočna, ni estimat neće biti točan bez obzira koliko je težinski faktor dobro podešen. Predikcija uključuje i unaprijed definirane matrice A i Q o kojima ovisi uspješnost i točnost KF filtra, objašnjava [10].

Bitno je napomenuti kako je kvaliteta predikcije određena na osnovu točnosti modela sustava, što daje konačni zaključak kako su performanse LKF-a određene modelom sustava.

#### **5.2.4 Model sustava – varijable stanja**

Kao što je opisano u [10] i [14], model sustava je potreban kako bi bilo moguće implementirati Kalmanov filtar. U slučaju kada se spominje Linearni Kalmanov sustav misli se na to da je i sustav linearan, što kod proširenog Kalmanovog filtra nije slučaj. EKF se bavi nelinearnim sustavima koji se kasnije lineariziraju.

Prikaz kontinuiranog LTI sustava:

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t) \quad (50)$$

$$y(t) = C x(t) + D u(t) \quad (51)$$

Prikaz diskretnog LTI sustava:

$$x(k+1) = A x(k) + B u(k) + w(k) \quad (52)$$

$$y(k) = C x(k) + D u(k) + v(k) \quad (53)$$

pri čemu su:

$w(k)$  – unutarnji šum ili procesni šum;

$v(k)$  – šum mjerenja.

Diskretni sustav za potrebe KF-a:

$$x(k + 1) = A x(k) + w(k); \quad (54)$$

$$y(k) = H x(k) + v(k); \quad (55)$$

može se zapisati i kao:

$$X_{k+1} = A X_k + w(k); \quad (56)$$

$$Z_K = H X_K + v_k; \quad (57)$$

gdje je:

- $X_k$  vektor stupac dimenzija  $n \times 1$ ;
- $Z_K$  vektor stupac dimenzija  $m \times 1$ ;
- $A$  matrica prijelaza stanja dimenzija  $n \times n$ ;
- $H$  matrica stanje-mjerenja dimenzija  $m \times n$ ;
- $v_k$  procesni šum i  $w_k$  šum mjerenja.

Prema [10], varijable stanja najčešće su fizikalne veličine kao što su brzina, pozicija. Elementi  $A$  i  $H$  matrica su konstante ovisne o dinamici sustava. Matrica  $A$  govori kako se sustav mijenja kroz vrijeme, a matrica  $H$  prikazuje ovisnost između mjerenja i varijabli stanja.

Prilikom implementacije LKF-a pretpostavlja se da su svi šumovi bijeli što znači da sadrže cijeli spektar frekvencija.

Najveći značaj matrica odnosno modela sustava nalazi se u koracima:

- 1. Korak – predikcija (48);
- 3. Korak – estimacija (49).

### KOVARIJANCA ŠUMA

Šum je slučajna varijabla koja se u slučaju LKF-a modelira kao bijeli šum. Šumovi u state space modelu se izražavaju preko sljedećih matrica, navode [10], [12]:

- $Q$  – Matrica kovarijance šuma  $w_k$  ( $n \times n$ );
- $R$  – Matrica kovarijance šuma  $v_k$  ( $m \times m$ );

matrica  $Q$  definira se kao matrica čiji su elementi na glavnoj dijagonali varijance varijable. Matrice  $Q$  i  $R$  se u praksi najčešće kalibriraju što je točnije moguće metodom pokušaja i pogreške.



Matrica  $R$  igra ulogu u 2. koraku pri izračunavanju Kalmanovog pojačanja.

$$K_K = P_{\bar{K}} H^T (H P_{\bar{K}} H^T + R)^{-1}. \quad (58)$$

U [11] je prikazano kako se utjecaj matrice  $R$  može detaljnije prikazati pomoću izraza (58) kao:

$$K_K = \frac{P_K^{-1} H^T}{H P_{\bar{K}} H^T + R}; \quad (59)$$

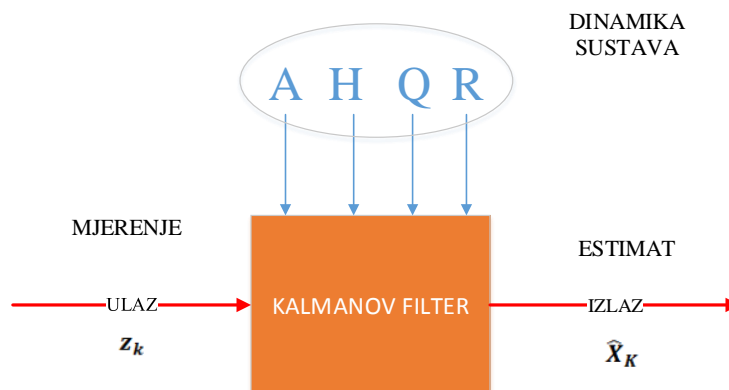
sada se može primijetiti kako se povećanjem  $R$   $K_K$  smanjuje. Kako se  $K_K$  smanjuje doprinos mjerenja na estimat se također smanjuje, ali se s druge strane povećava doprinos na predikciju.

Matrica  $Q$  se pojavljuje u prvom koraku, u predikciji:

$$P_{\bar{K}+1} = A P_K A^T + Q; \quad (60)$$

gdje se vrijednost  $P_{\bar{K}+1}$  povećava kako se povećava matrica  $Q$  i obrnuto. Osim toga indirektno se reflektira i na  $K_K$  pa kako se nalazi i u brojniku i nazivniku može se zaključiti da se povećanjem  $Q$  povećava i  $K_K$ . Ukoliko je cilj dobiti estimat s manje varijacija, potrebno je smanjiti  $Q$ .

### 5.2.5 Blok shema KF-a



Slika 5.12: Prikaz blok sheme KF-a

Izvor: Autor prema [10]

### 5.2.6 Prošireni Kalmanov filter

Prošireni Kalmanov filter (*eng. Extended Kalman Filter, EKF*) rješava slučaj kada jednačbe procesa i mjerenja nisu linearne, opisuje [11]. Drugim riječima EKF je nelinearna verzija LKF-a. Nelinearnost procesa, odnosno nelinearnost jednačbi procesa i mjerenja dovode do toga da slučajne varijable dobivene nelinearnom transformacijom više nemaju distribuciju vjerojatnosti jednaku normalnoj razdiobi. Nadalje, prema [13], vrši se linearizacija gdje se pokušava aproksimirati Bayesovo pravilo i predstaviti aposteriornu distribuciju vjerojatnosti pomoću normalne odnosno Gaussove razdiobe. EKF pokušava obaviti linearizaciju oko estimacije stanja i kovarijance iz prethodnog koraka ( $k - 1$ ). Može se opisati i kako KF estimira stanje na osnovi lineariziranog modela, dok se linearizirani model izračunava oko estimirane vrijednosti dobivene KF-om, navodi [12].

Ako sustav postane nelinearan tada prema [24], model procesa i mjerenja postaje:

$$X_K = f(X_{K-1}, u_K, w_K) \quad (61)$$

$$Z_K = h(X_K, v_K) \quad (62)$$

Estimacija stanja za sljedeći korak  $k$  dobiva se pomoću aposteriornog stanja iz koraka  $k - 1$ , gdje se kasnije točno ta estimacija koristi u izračunu mjerenja za sljedeći korak  $k$ , opisuje [24]:

$$\tilde{X}_K = f(\hat{X}_{K-1}, u_K, 0); \quad (63)$$

$$\tilde{Z}_K = h(\hat{X}_K, 0); \quad (64)$$

gdje je  $\hat{X}_K$  „a posteriori“ estimat stanja. Sljedeći korak je linearizacija estimacije stanja i mjerenja oko dobivenih vrijednosti iz izraza (63) i (64):

$$X_K \approx \tilde{X}_K + A_K(X_{K-1} - \hat{X}_{K-1}) + W_K w_K; \quad (65)$$

$$Z_K \approx \tilde{Z}_K + H(X_K - \tilde{X}_K) + V_K v_K; \quad (66)$$

poznato je da su  $X_K$  i  $X_{K-1}$  i  $Z_K$  varijable stanja.  $\tilde{X}_K$  i  $\tilde{Z}_K$  su vektori aproksimiranih stanja i mjerenja dok je  $A_K$  Jakobijan matrica parcijalnih derivacija funkcije  $f$  po varijabli  $X$  u trenutku  $K$ . Prema [11], matrica se može prikazati sljedećim izrazom:

$$A_{[i,j]} = \frac{df_{[i]}}{dx_{[j]}}(\hat{X}_{K-1}, u_K, 0) \quad (67)$$

Matrica  $W_K$  predstavlja Jakobijan matricu parcijalnih derivacija funkcije  $f$  po varijabli  $w$ , koja predstavlja procesni šum s kovariancom  $Q$  u trenutku  $K$ , [11]:

$$W_{[i,j]} = \frac{df_{[i]}}{dw_{[j]}}(\hat{X}_{K-1}, u_K, 0) \quad (68)$$

Matrica  $V_K$  predstavlja Jakobijan matricu parcijalnih derivacija funkcije  $h$  po varijabli  $v$  u trenutku  $K$ , koja se odnosi na šum mjerenja te se zbog toga kao referentna uzima funkcija  $h$ , [11]:

$$V_{[i,j]} = \frac{dh_{[i]}}{dv_{[j]}}(\hat{X}_K, 0) \quad (69)$$

Nakon obavljene linearizacije, izrazima (70) i (71) moguće je definirati greške procjene gdje se od stvarne vrijednosti oduzimaju estimirane vrijednosti, opisano je u [11]:

$$\tilde{e}_{X_K} = X_K - \tilde{X}_K; \quad (70)$$

$$\tilde{e}_{Z_K} = Z_K - \tilde{Z}_K; \quad (71)$$

pa je na osnovu grešaka procjene moguće je izraze za linearizaciju redefinirati kao:

$$\tilde{e}_{X_K} \approx A_K(X_{K-1} - \hat{X}_{K-1}) + \varepsilon_K; \quad (72)$$

$$\tilde{e}_{Z_K} \approx H\tilde{e}_{X_K} + \mu_K; \quad (73)$$

gdje  $\varepsilon_K$  i  $\mu_K$  predstavljaju nove nezavisne varijable koje su također slučajne i imaju normalnu razdiobu vjerojatnosti.

Pošto su i ove jednadžbe linearne moguće je pomoću razlika mjerenja  $\tilde{e}_{Z_K}$  izračunati procjenu greške  $\tilde{e}_{X_K}$  kako bi se ona kasnije iskoristila za izračunavanje „a posteriori“ stanja originalnog linearnog procesa.

$$\hat{X}_K = \tilde{X}_K + \hat{e}_K \quad (74)$$

gdje prema [11], varijabla  $\hat{e}_K$  ima normalnu razdiobu:

$$P(\hat{e}_{X_K}) \sim N(0, E[\hat{e}_{X_K}, \tilde{e}_{X_K}^T]), \quad (75)$$

Sljedeći izraz određuje procjenu greške  $\hat{e}_K$  prema [25]:

$$\hat{e}_K = K_K \tilde{e}_{Z_K}; \quad (76)$$

ako se sada uvrsti u izraz (75), dobije se izraz pomoću kojeg se izračunava osvježavanje mjerenja odnosno korekcija :

$$\hat{X}_K = \tilde{X}_K + K_K \tilde{e}_{Z_K} = \tilde{X}_K + K_K (Z_K - \tilde{Z}_K); \quad (77)$$

potrebno je napomenuti kako  $\tilde{X}_K$  i  $\tilde{Z}_K$  dolaze iz prethodnih izraza (63) i (64). te  $K_K$  koji dolazi iz izraza (58) za običan KF s odgovarajućom supstitucijom za kovarijancu greške mjerenja, [25].

Konačno, mogu se prikazati gotove jednadžbe **predikcije** za EKF s time da se sada uvodi supstitucija  $\hat{X}_{\bar{K}} = \tilde{X}_K$  kako bi se zadržala ranije definirana „a priori notacija“, navodi [11]:

$$\hat{X}_{\bar{K}} = f(\hat{X}_{K-1}, u_K, 0) \quad (78)$$

$$P_{\bar{K}} = A_K P_{K-1} A_K^T + W_K Q_{K-1} W_K^T \quad (79)$$

Nadalje prema [11], slijedi prikaz jednadžbi za korak estimacije i korekcije:

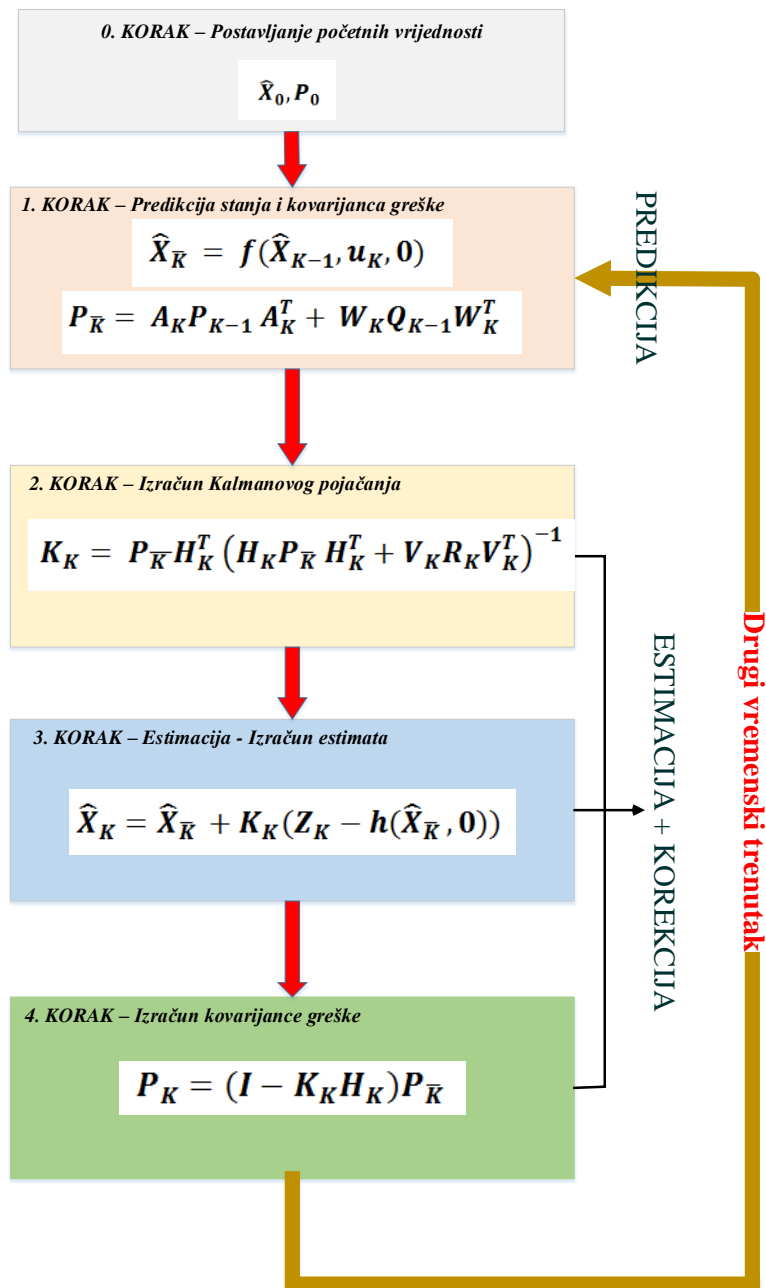
$$K_K = P_{\bar{K}} H_K^T (H_K P_{\bar{K}} H_K^T + V_K R_K V_K^T)^{-1}; \quad (80)$$

$$\hat{X}_K = \hat{X}_{\bar{K}} + K_K (Z_K - h(\hat{X}_{\bar{K}}, 0)); \quad (81)$$

$$P_K = (I - K_K H_K) P_{\bar{K}}; \quad (82)$$

gdje  $h$  dolazi iz izraza (64) dok su  $H_K$  i  $V_K$  Jakobijanove matrice mjerenja u trenutku  $K$ , a  $R_K$  kovarijanca šuma mjerenja.

Na samome kraju može se zaključiti kako je osnovni rad EKF-a isti kao i onaj kod LKF-a samo što se uvodi linearizacija nelinearnog procesa. Slika 5.13 prikazuje algoritam EKF-a.



Slika 5.13: Algoritam rada EKF-a

Izvor: Autor prema [11]

Zaključak je da EKF nakon linearizacije zadržava ista svojstva kao LKF. Također, postoje dvije grupe jednačbi, odnosno dva koraka gdje EKF u prvom koraku estimira stanje u koraku  $K$  na temelju „a posteriori“ estimacije iz prethodnog koraka ( $K - 1$ ), nakon čega se koristi mjerenje kako bi se poboljšala „a priori“ estimacija.

### **5.2.7 Primjer estimacije GPS pozicije pomoću proširenog Kalmanovog filtra (EKF)**

Ovaj primjer prikazuje performanse EKF-a pri estimaciji pozicije u GPS prijemniku. U prošlom primjeru predstavljena je metoda vjerojatnosti koja u većini situacija ne daje zadovoljavajuće rezultate. Iz tog se razloga u GPS prijemnicima najčešće koristi EKF za estimaciju pozicije. Pošto je proces nelinearan nije moguće LKF već neku od njegovih proširenih verzija.

Kao što je ranije već spomenuto, cijeli proces estimacije pozicije odvija se u GPS prijemniku. Prijemnik na osnovu signala kojeg šalju sateliti izračunava trenutnu poziciju, te je prikazuje u WGS-84 koordinatnom sustavu.

#### **5.2.7.1 Određivanje pozicije satelita i pseudoudaljenosti**

Poznato je da su za određivanje pozicije u 3D koordinatama potrebna 4 satelita. Svaki satelit odašilje navigacijske poruke koje se sastoje od dva dijela. Prvi dio je satelitski almanah, a drugi dio je poruka u kojoj se nalaze podaci o satelitu, na osnovu kojih GPS prijemnik izračunava pseudoudaljenosti. GPS-prijemnik od satelita prikuplja dvije vrste kodiranih informacija. Jedan tip informacija, podaci iz almanaha, sadrže približni položaj satelita. Ti se podaci kontinuirano prenose i spremaju u memoriju GPS-prijemnika tako da on zna orbite satelita i gdje bi koji satelit trebao biti. Kako se sateliti miču uokolo, podaci iz almanaha se periodički ažuriraju novim informacijama. Postoji algoritam prema kojem se iz navigacijske poruke izračunavaju koordinate satelita u ECEF koordinatnom sustavu. Slijedi opis algoritma i opis potrebnih ulaznih podataka, kao što je opisano u [26]:

Sljedeći podaci iz navigacijske poruke potrebni su za izračunavanje pozicije satelita:

Tablica 5.2.2: Parametri navigacijske poruke potrebni za izračun pozicije satelita

Izvor: [26]

Podaci navigacijske poruke	Vrijednost u RINEX poruci
PRN broj satelita	svprn
Anomalija očekivanja	Mo
Sqrt	roota
Varijacija kutne brzine	deltan

Ekscentritet	ecc
Argument perigeja	omega0
Korekcijski koeficijenti	cuc, cus, crc, crs, cic, cis
Inklinacija	i0
Iznos inklinacije	idot
Rektascenzija	Omega0
Iznos rektascenzije	Omegadot
Vrijeme efemeride	toe

Tablica 5.2.3 prikazuje algoritam pomoću koje se dolazi do koordinata satelita u nekom vremenskom trenutku.

Tablica 5.2.3: Algoritam za izračunavanje ECEF pozicije satelita

Izvor: [26]

VRIJEDNOSTI U IZRAČUNU POZICIJE	IZRAČUN POTREBNIH VRIJEDNOSTI
Gravitacijska konstanta za WGS 84	$\mu = 3.986008 * 10^{14} m^3/s^2$
Rotacijska konstanta zemlje za WGS 84	$\dot{\Omega}_e = 7.292115167 * 10^{-5} rad/s$
Os najdužeg dijametra	$a = (\sqrt{a})^2$
Vrijeme referentne epohe efemeride	$t_{n+1} = t - t_{0e}$
Prava anomalija	$f_n = \tan^{-1} \left\{ \frac{\sqrt{(1 - e^2) \sin E_n / (1 - e \cos E_n)}}{(\cos E_n - e) / (1 - e \cos E_n)} \right\}$
Ekscentrična anomalija kosinusa	$E_n = \cos^{-1} \left( \frac{e + \cos f_n}{1 + e \cos f_n} \right)$
Podatak o visini	$\Phi_n = f_n + \omega$
Drugi harmonik korekcije za $\Phi_n$	$\delta\mu_n = C_{\mu C} \cos 2\Phi_n + C_{\mu S} \sin 2\Phi_n$
Drugi harmonik korekcije radijusa	$\delta r_n = C_{rC} \cos 2\Phi_n + C_{rS} \sin 2\Phi_n$
Drugi harmonik korekcije inklinacije	$\delta i_n = C_{iC} \cos 2\Phi_n + C_{iS} \sin 2\Phi_n$
Ispravljeni argument visine	$\mu_n = \Phi_n + \delta\mu_n$
Ispravljeni radijus	$r_n = a(1 - e \cos E_n) + \delta r_n$
Ispravljena inklinacija	$i_n = i_0 + \delta i_n + (IDOT)t_n$



X koordinate u orbitalnom pogledu	$\dot{X}_n = r_n \cos \mu_n$
Y koordinate u orbitalnom pogledu	$\dot{Y}_n = r_n \sin \mu_n$
Ispravljena z.dužina uzlaznog čvora	$\Omega_n = \Omega_0 + (\dot{\Omega} + \dot{\Omega}_e)t_n - \dot{\Omega}_e t_{0e}$
ECEF X koordinate	$X_n = \dot{X}_n \cos \Omega_n - \dot{Y}_n \cos i_n \sin \Omega_n$
ECEF Y koordinate	$Y_n = \dot{X}_n \sin \Omega_n + \dot{Y}_n \cos i_n \sin \Omega_n$
ECEF Z koordinate	$Z_n = \dot{X}_n \sin i_n$

Za potrebe ove simulacije podaci o položajima satelita preuzeti su s izvora [27]. Tablica prikazuje položaje satelita u ECEF koordinatama za fiksni GPS prijamnik, za prvi vremenski trenutak (1s). Ukupni vremenski interval je 25 sekundi što znači da postoji 25 3x4 matrica za svaku sekundu. Stupci označavaju X,Y,Z koordinate satelita, dok se redovi odnose na satelite (potrebno 4 satelita za određivanje pozicije). Ovi se podaci nalaze u datoteci *SV\_Pos.mat*, koja je u cjelovitosti prikazana u prilogu [C.1].

Tablica 5.2.4: Podaci o pozicijama satelita potrebni za simulaciju, *SV\_Pos.mat*

Izvor: [27], Prilog: [C.1]

	X	Y	Z
Sat 1.	-1.160202394891370e+07	1.406311749311160e+07	1.881143431127460e+07
Sat 2.	-2.085327157363420e+07	1.806977211858160e+06	1.654268212379230e+07
Sat 3.	-1.435592601723400e+07	8.650961884109820e+06	2.073635498058640e+07
Sat 4.	7.475239675305290e+06	1.296618127713770e+07	2.193157679217510e+07

Nakon što GPS prijamnik zna precizan položaj satelita u prostoru, još mora odrediti udaljenost na kojoj se ti sateliti nalaze. Postoji jednostavna formula koja kaže prijammiku koliko je pojedini satelit udaljen. Udaljenost od satelita jednaka je brzini emitiranog signala pomnoženoj s vremenom koje treba da signal dođe do prijammika (brzina x vrijeme putovanja = udaljenost). Brzina putovanja signala je poznata, odnosno to je brzina svjetlosti.

Prema [6], način na koji GPS izračunava pseudoudaljenost bazira se na kodiranom signalu kojeg šalje satelit. Emitirani kod naziva se "pseudoslučajni kod" jer slični signalu šuma. Satelit generira pseudoslučajni kod, a GPS-prijamnik generira isti kod i pokušava se

prilagoditi kodu satelita gdje sam prijammnik uspoređuje dva koda, kako bi znao koliko treba pomaknuti kod da bi odgovarao kodu satelita. Kada se vrijeme kašnjenja pomnoži s brzinom svjetlosti dobije se udaljenost. Sljedeći problem na koji se nailazi je sat GPS prijammnika koji nije točan, odnosno usklađen s GPS vremenom (vrijeme satelita). Tako da prilikom svakog određivanja pseudoudaljenosti treba iznos ispraviti za iznos pogreške sata. I prilikom ove kalkulacije potrebna su 4 satelita kako bi uklonila greška zbog pogreške sata GPS prijammnika.

Sljedećim izrazom moguće je prikazati izračunavanje jednadžbu pseudoudaljenost:

$$\rho = \|X_s - X\| + b + v \quad (83)$$

gdje je  $X_s$  pozicija satelita (x koorinata),  $X$  pozicija prijammnika,  $b$  predstavlja pogrešku sata GPS prijammnika te mora biti riješena zajedno s pozicijom prijammnika.  $v$  predstavlja šum mjerenja, koji se modelira kao bijeli šum. Sada se lako može zaključiti kako postoje 4 nepoznanice odnosno X,Y,Z koordinate prijammnika i pogreška sata  $b$ .

U matrici pohranjenoj u datoteci *SV\_Rho.mat* nalaze se izračunate pseudoudaljenosti za 25 vremenskih trenutaka (25 s), s izvora [27]. Postoji 25 redaka gdje se u svakom od njih nalaze 4 vrijednosti pseudoudaljenosti, zbog 4 satelita potrebna za određivanje pozicije. Tablica prikazuje podatke o pseudoudaljenostima za prve 2 s, a svi podaci u prilogu [C.2].

Tablica 5.2.5: Podaci o izmjerenim pseudoudaljenostima, *SV\_rho.mat*

Izvor: [27],Prilog: [C.2]

	Satelit 1.	Satelit 2.	Satelit 3.	Satelit 4.
1 sek.	2.356820641737830e+07	2.618392145774500e+07	2.465221526277050e+07	2.560698293304660e+07
2 sek.	2.356842779098620e+07	2.618440411274160e+07	2.465262190118570e+07	2.560649947480010e+07

### 5.2.7.2 Model procesa, definiranje matrica i početnih vrijednosti

U ovome se primjeru za model procesa koristi se dinamičkih model konstantne brzine (eng. *Costant Velocity, CV*), preuzet iz [27], i opisan u [28]. Model se nalazi u m-skripti *CV\_Model.m*, prilog [C.4]. Ovaj se model koristi pošto je poznata brzina gibanja signala ( $c \approx 3 * 10^8$  m/s). Kod u Matlabu koji se odnosi na model konstante brzine (CV model):

```
% CV MODEL - PROCESNI MODEL
% Model konstantne brzine za GPS pozicioniranje [27]
function [Val, Jacob] = CV_Model(X, T)
```

```

Val = zeros(size(X));
Val(1:2:end) = X(1:2:end) + T * X(2:2:end);
Val(2:2:end) = X(2:2:end);
Jacob = [1, T; 0, 1];
Jacob = blkdiag(Jacob, Jacob, Jacob, Jacob);

end

```

Zbog nelinearnosti sustava poznato je da je jednačba stanja i mjerenja glase:

$$x(K + 1) = f(X_K) + w_K; \quad (84)$$

$$z(K) = g(X_K) + v_K; \quad (85)$$

gdje je  $x$  dimenzija  $nx1$ , a  $z$   $mx1$ , te

$$w \sim N(0, Q); \quad (86)$$

$$v \sim N(0, R); \quad (87)$$

varijabla  $w$  predstavlja Gaussov šum s kovarijancom šuma  $Q$ , a varijabla  $v$  šum mjerenja s kovarijancom  $R$ .

Važno je postaviti funkciju  $fstate$  koja će predstavljati prijelazna stanja, te će vraćati vrijednost  $fstate(X_K)$  i Jakobijan matricu od  $fstate$  u  $X_K$ , opisuje [27]:

```

% Postavljanje funkcije fstate na osnovu CV modela
% procesa, poziva se funkcija iz CV_Model.m
fstate = @(X) CV_Model(X, T);

```

Sljedeći korak je definiranje matrice kovarijanci procesnog šuma koja je prema [15] određena sljedećim izrazima.

Dinamički proces se može opisati pomoću vektora diferencijalne jednačbe u matričnom zapisu:

$$\dot{X} = D X + C; \quad (88)$$

gdje je matrica  $X = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5 \ x_6 \ x_7 \ x_8]^T$ :  $x_1$  – pozicija istok,  $x_2$ - brzina istok,  $x_3$  – pozicija sjever,  $x_4$ - brzina sjever,  $x_5$  – visina,  $x_6$  iznos visine,  $x_7$  – pogreška udaljenosti (bias error),  $x_8$  – pogreška udaljenosti (drift error). Matrica  $D$  dana je izrazom:

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad (89)$$

a matrica  $C = [0 \ u_1 \ 0 \ u_2 \ 0 \ u_3 \ u_f \ u_g]^T$  i predstavlja spektralne gustoće bijelog šuma  $S_p$  za  $u_1, u_2$  i  $u_3$  te  $S_f$  za  $u_f$  i  $S_g$  za  $u_g$ .

Sada je moguće tretirati parove varijable stanja neovisno, čime se nakon izvoda dolazi do sljedećeg izraza:

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{XYZ} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q_{XYZ} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{XYZ} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_B \end{bmatrix} \quad (90)$$

$$Q_{XYZ} = \sigma^2 \begin{bmatrix} \frac{T^3}{3} & \frac{T^2}{2} \\ \frac{T^2}{2} & T \end{bmatrix} \quad (91)$$

$$Q_B = \begin{bmatrix} S_f T + \frac{S_g T^3}{3} & \frac{S_g T^2}{2} \\ \frac{S_g T^2}{2} & S_g T \end{bmatrix} \quad (92)$$

U Matlabu se postavlja vrijednost matrice kovarijance procesnog šuma Q prema prethodnim izrazima:

```
% Postavljanje matrice kovarijanci suma Q
Sf = 36; Sg = 0.01; sigma=5; %Varijanca prijelaznog stanja
Qb = [Sf*T+Sg*T*T*T/3 Sg*T*T/2;
Sg*T*T/2 Sg*T];
Qxyz = sigma^2 * [T^3/3 T^2/2;
T^2/2 T];
Q = blkdiag(Qxyz,Qxyz,Qxyz,Qb);
```

dalje, postavljaju se inicijalne vrijednosti koje se učitavaju samo pri pokretanju simulacije. Prema [27], vrijednosti su postavljene na sljedeće vrijednosti:

```
% Postavljanje inicijalne vrijednosti varijable stanja x
% i kovarijance stanja P
%Inicijalna pozicija
x = zeros(8,1);
x([1 3 5]) = [-2.168816181271560e+006
              4.386648549091666e+006
              4.077161596428751e+006];
%Inicijalna brzina
x([2 4 6]) = [0 0 0];
%Inicijalna greška zbog pomaka sata
x(7,1) = 3.575261153706439e+006;
x(8,1) = 4.549246345845814e+001;
P = eye(8)*10;
```

Ostale se varijable postavljaju za svaki vremenski trenutak posebno zbog čega je potrebno napraviti petlju kako bi se vrijednosti osvježavale za svaki novi trenutak.

Funkcija `hmeas` koja predstavlja funkciju mjerenja te uzima  $X_K$  i vraća  $hmeas(X_K)$  i Jakobijan funkcije  $hmeas$  u točki  $X_K$  postavlja se:

```
for ii = 1:N
    % Postavljanje funkcije pseudoudaljenosti
    hmeas = @(X) F_Pseudoudaljenost(X, SV_Pos{ii});
end
```

gdje funkcija `hmeas` poziva funkciju `F_Pseudoudaljenost` spremljenu u datoteci `L_Pseudoudaljenost.m`, prilog [C.5]:

```
% MODEL MJERENJA - PSEUDOUDALJENOST
% Izracunavanje vrijednosti pseudoudaljenosti
% Val = || Xs - X || + b i njegove Jakobijan matrice.
function [Val, Jacob] = F_Pseudoudaljenost(X, SV)
    dX = bsxfun(@minus, X([1,3,5])', SV); % X - Xs
```

```

Val = sum(dX .^2, 2) .^0.5 + X(7);

Jacob = zeros(size(SV, 1), size(X, 1));

Jacob(:, [1,3,5]) = bsxfun(@rdivide, dX, Val);

Jacob(:, 7) = 1;

end

```

također i matrica  $R$  te podatak o izmjerenoj vrijednosti  $z$ , prema [27] postavljaju se za svaki vremenski trenutak posebno:

```

for ii = 1:N
% Postavljanje matrice R

Rhoerror = 36;          %Varijanca greške mjerenja

R = eye(size(SV_Pos{ii}, 1)) * Rhoerror;

% Postavljanje izmjerenih vrijednosti, podaci iz

% SV_Rho.mat

z = SV_Rho{ii}.';

end

```

### 5.2.7.2 Linearizacija i implementacija EKF-a

Razlog zbog kojeg se u ovom primjeru koristi EKF je nelinearnost jednadžbi pseudoudaljenosti i modela procesa. Jednadžbe pseudoudaljenosti mogu se zapisati i na sljedeći način, navodi [15]:

$$\rho_1 = \sqrt{(X_1 - x)^2 + (Y_1 - y)^2 + (Z_1 - z)^2} + c\Delta t \quad (93)$$

$$\rho_2 = \sqrt{(X_2 - x)^2 + (Y_2 - y)^2 + (Z_2 - z)^2} + c\Delta t \quad (94)$$

$$\rho_3 = \sqrt{(X_3 - x)^2 + (Y_3 - y)^2 + (Z_3 - z)^2} + c\Delta t \quad (95)$$

$$\rho_4 = \sqrt{(X_4 - x)^2 + (Y_4 - y)^2 + (Z_4 - z)^2} + c\Delta t \quad (96)$$

U poglavlju 5.2.6 je detaljnije objašnjenja linearizacija te će se ovdje samo prikazati samo način na koji se dolazi do parcijalnih derivacija potrebnih za linearizaciju jednadžbi oko aproksimirane lokacije prijemnika  $X_p = [x_p y_p z_p]^T$ :

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial x} = -\frac{(X_i - x_p)}{\sqrt{(X_i - x_p)^2 + (Y_i - y_p)^2 + (Z_i - z_p)^2}}; \quad (97)$$

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial y} = -\frac{(Y_i - y_p)}{\sqrt{(X_i - x_p)^2 + (Y_i - y_p)^2 + (Z_i - z_p)^2}}; \quad (98)$$

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial z} = -\frac{(Z_i - z_p)}{\sqrt{(X_i - x_p)^2 + (Y_i - y_p)^2 + (Z_i - z_p)^2}}; \quad (99)$$

gdje je  $i = 1, \dots, 4$ . Odnosno ako se gleda iz geometrijske perspektive, vektor parcijalnih derivacija za svaki satelit glasi:

$$\left[ \frac{\partial \rho_i}{\partial x} \quad \frac{\partial \rho_i}{\partial y} \quad \frac{\partial \rho_i}{\partial z} \right]^T; \quad (100)$$

gdje je prethodni vektor ustvari usmjeren od satelita prema prijammiku, što je određeno negativnim predznakom. Rezultantni vektor mjerenja pseudoudaljenosti bez šuma, prema [15], dan je sljedećim izrazom:

$$\begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \\ \rho_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \hat{\rho}_1(x_p) \\ \hat{\rho}_2(x_p) \\ \hat{\rho}_3(x_p) \\ \hat{\rho}_4(x_p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \rho_1}{\partial x} & \frac{\partial \rho_1}{\partial y} & \frac{\partial \rho_1}{\partial z} & 1 \\ \frac{\partial \rho_2}{\partial x} & \frac{\partial \rho_2}{\partial y} & \frac{\partial \rho_2}{\partial z} & 1 \\ \frac{\partial \rho_3}{\partial x} & \frac{\partial \rho_3}{\partial y} & \frac{\partial \rho_3}{\partial z} & 1 \\ \frac{\partial \rho_4}{\partial x} & \frac{\partial \rho_4}{\partial y} & \frac{\partial \rho_4}{\partial z} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \\ c\Delta t \end{bmatrix}; \quad (101)$$

gdje su:  $\rho_i$  – pseudoudaljenost bez šuma,  $x_p$  – nominalna točka linearizacije,  $\hat{\rho}_1(x_p)$  predikcija pseudoudaljenosti bazirana na  $x_p$ ,  $[\Delta x \ \Delta y \ \Delta z \ c\Delta t]^T$  – diferencijski vektor između prave i estimirane pozicije,  $c\Delta t$  – greška udaljenosti zbog vremenske greške prijammika.

Nakon postavljanja modela procesa, definiranja jednadžbe pseudoudaljenosti došao je red i na ugradnju EKF-a. U Matlabu je izrađena posebna m skripta koja sadrži funkciju EKF-a, i nalazi se u datoteci *EKF.m*, te u prilogu [C.6].

Sintaksa:  
`function [xo, Po] = EKF(fstate, hmeas, Q, R, z, xi, Pi)`

Tablica 5.2.6: Ulazni i izlazni parametri EKF funkcije

Izvor: [27]

ULAZNI PARAMETRI	
fstate	Prije definirana funkcija prijelaznih stanja koja uzima varijablu stanja $X_K$ i vraća vrijednosti $f(X_K)$ i Jakobian matricu funkcije $f$ u $X_K$ odnosno sve parcijalne derivacije prvog reda.
hmeas	Funkcija koja se definira za svaki vremenski trenutak a odnosi se na mjerenja pseudoudaljenosti. Uzima varijablu stanja $X_K$ i vraća vrijednosti $hmeas(X_K)$ i Jakobian matricu funkcije $hmeas$ u $X_K$ odnosno sve parcijalne derivacije prvog reda.
Q, R	Prethodno definirane matrice kovarijanci procesnog šuma i šuma mjerenja
Z	Vrijednosti mjerenja pseudoudaljenosti; mijenja se za svaki vremenski trenutak. Podaci su zapisani u matrici SV_rho.mat prema izvoru [].
Xi, Pi	„a priori“ estimati stanja( $nx1$ ) i kovarijance stanja( $nxn$ ).
IZLAZNI PARAMETRI	
Xo	„a posteriori“ estimacija stanja. Varijabla ima dimenzije ( $nx1$ ). Vrijednost koja odgovara $\hat{X}_K$ estimatu u algoritmu KF-a.
Po	„a posteriori“ estimat kovarijance stanja. Varijabla dimenzija ( $nxn$ ) koja odgovara vrijednosti $P_K$ u algoritmu KF filtra.

Sljedeći korak podrazumijeva implementaciju linearizacije u Matlabu, odnosno potrebno je linearizirati funkciju prijelaznih stanja i funkciju mjerenja stanja kako bi se dobile matrice A i H koje predstavljaju dinamiku sustava. Time se omogućuje svođenje na običan KF. Pošto se izračunaju matrice A i H moguće je jednadžbe sustava zapisati na sljedeći način:

$$X(K + 1) = A X(K) + w_K \quad (102)$$

$$Z(K) = H X(K) + v_K \quad (103)$$



Prvi korak je postavljanje radne točke oko koje će se odvijati linearizacija. U Matlabu je to ostvareno sljedećim kodom:

```
1. Xp = f(Xi)
N_state = size(Xi, 1);
[Xp, ~] = fstate(Xi);
```

kasnije se izračunava matrica A koja je Jakobijan procesnog modela prema sljedećem izrazu:

$$A = \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)_{x_p} \quad (104)$$

```
2. Linearizacija jednadžbe stanja
[~, A] = fstate(Xp)
```

Teorija na osnovu koje se izvodi linearizacija jednadžbe mjerenja opisana je na početku ovog poglavlja. Matricu H se izračunavamo prema izrazu:

$$H = \left( \frac{\partial g}{\partial x} \right)_{x_p} \quad (105)$$

```
3. Linearizacija jednadžbe mjerenja
[hmeasXp, H] = hmeas(Xp)
```

Nakon obavljene linearizacije, poznate su vrijednosti A i H matrica pa se sada prema [27] može dovršiti algoritam EKF-a:

```
4. Izračunavanje kovarijance Xp-a
Pp = A * Pi * A.' + Q;

5. Izračunavanje Kalmanovog pojačanja
K = Pp * H' / (H * Pp * H.' + R);

6. Izlazno stanje (estimat)
Xo = Xp + K * (Z - hmeasXp);

I = eye(N_state, N_state);
7. Izračunavanje kovarijance stanja (estimat)
Po = (I - K * H) * Pp;
```

Važno je spomenuti kako se linearizacija i izračunavanje estimata izvode iznova za svaki vremenski trenutak. Iz tog je razloga funkcija EKF-a spremljena u datoteci *EKF.m* poziva u petlji. Druga linija koda služi za spremanje estimata u matricu *Pos\_EKF* kako bi se

mogla obaviti analiza dobivenih rezultata.  $N$  predstavlja broj vremenskih trenutaka, kojih u ovom primjeru ima 25.

```

for ii = 1:N
    function [xo, Po] = EKF(fstate, hmeas, Q, R, z, xi, Pi)
        Pos_EKF(:, ii) = X([1 3 5]).';
End

```

### 5.2.8 Nederivacijski nelinearan Kalmanov filter (UKF)

Nelinearni nederivirajući Kalmanov filter (eng. Unscented Kalman Filter, UKF) pripada višoj klasi filtra koji koriste tehniku statističke linearizacije, opisuje [16]. Ta se tehnika koristi za linearizaciju nelinearne funkcije slučajnih varijabli kroz linearnu regresiju između  $n$  točaka preslikanih iz prijašnje distribucije slučajnih varijabli. Za razliku od EKF-a gdje se distribucija stanja propagira analitički preko linearizacije prvog reda UKF izvodi linearizaciju bez korištenja derivacija. Distribucija stanja se odvija koristeći minimalni set odabranih točaka uzorkovanja, koje se nazivaju sigma točke. Također, i UKF kao i EKF radi u dva koraka odnosno predikcija modela i estimacija podataka, ali sadrži i međukorak za selekciju sigma točaka, navodi [17].

#### 5.2.8.1 Nelinearna transformacija i sigma točke

Nelinearna transformacija (eng. Unscented Transformation, UT) je metoda za proračun statistike slučajne varijable nakon preslikavanja nelinearnom funkcijom. Uzima se slučajna varijabla  $X$  koja ima svoju dimenziju  $L$ , te se proučava njezin prolazak kroz nelinearnu funkciju  $y = f(x)$ , opisano je u [16].

Ako se varijabli  $X$  dodaju parametri očekivanja  $\hat{x}$  i kovarijance  $P_X$  može se formirati matrica  $\mathcal{X}$  s  $2L + 1$  sigma vektora  $x_i$  prema pravilima, [29]:

$$\mathcal{X}_0 = \bar{X}; \quad (106)$$

$$\mathcal{X}_0 = \bar{X} + \left(\sqrt{(L + \lambda)P_X}\right)_i \quad i = 1, \dots, L; \quad (107)$$

$$\mathcal{X}_0 = \bar{X} - \left(\sqrt{(L + \lambda)P_X}\right)_{i-L} \quad i = L + 1, \dots, 2L; \quad (108)$$

gdje je parametar koji izražava raspršenost sigma točaka oko srednje vrijednosti  $\bar{X}$  prema [17]:

$$\lambda = \alpha^2(L + k) - L; \quad (109)$$

a parametri  $\alpha$  i  $k$  su konstante koje određuju  $\lambda$ , a najčešće se postavljaju na vrijednosti u rasponu od  $(10^{-4}, 1)$ , a parametar  $k$  se postavlja u 1.  $(\sqrt{(L + \lambda)P_X})_i$  predstavlja  $i$ -ti sutpac matričnog drugog korijena. Takvi sigma vektori propagiraju kroz nelinearnu funkciju:

$$\gamma_i = f(X_i) \quad i = 0, \dots, 2L \quad (110)$$

Očekivanje i kovarijanca za  $\bar{y}$  koristeći otežano usrednjavanje očekivanja i kovarijance posteriornih sigma točaka, [29]:

$$\bar{y} \approx \sum_{i=0}^{2L} W_i^{(m)} \gamma_i; \quad (111)$$

$$P_y \approx \sum_{i=0}^{2L} W_i^{(c)} \{\gamma_i - \bar{y}\} \{\gamma_i - \bar{y}\}^T; \quad (112)$$

gdje  $W_i$  predstavlja:

$$W_0^{(m)} = \frac{\lambda}{L + \lambda} \quad (113)$$

$$W_0^{(c)} = \frac{\lambda}{L + \lambda} + (1 - \alpha^2 + \beta); \quad (114)$$

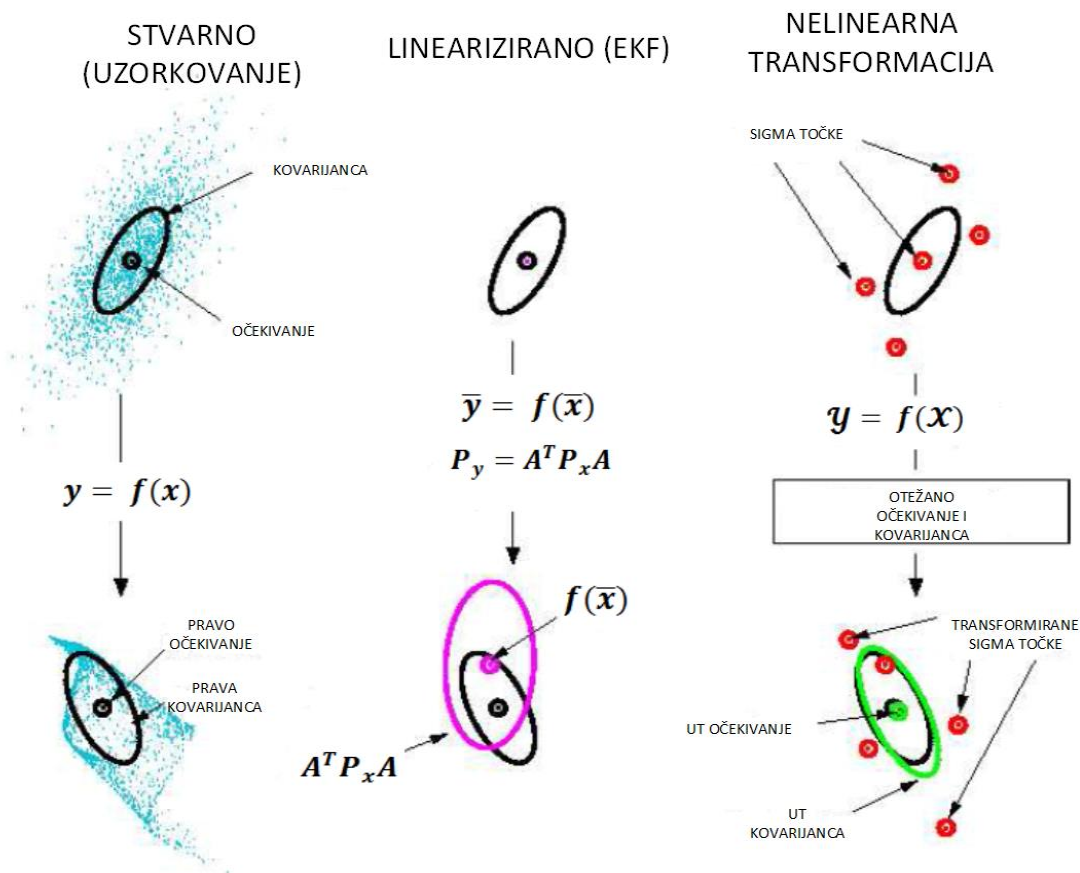
parametar  $\beta$  se uglavnom postavlja na vrijednost 2 te predstavlja optimalnu vrijednost za Gaussovu distribuciju opisuje [29].

$$W_i^{(c)} = W_i^{(m)} = \frac{\lambda}{2(L + \lambda)} \quad i = 1, \dots, 2L \quad (115)$$

### 5.2.8.2 Algoritam UKF-a

Kao i prijašnji EKF i UKF se temelji na pretpostavci da su mjerene i estimirane vrijednosti slučajne varijable s Gaussovom distribucijom vjerojatnosti. Kod EKF-a se veličine estimiraju primjenom razvoja u Taylorov red modela procesa i modela mjerenja uz

zanemarivanje članova viših redova, [17]. Međutim, u nekim situacijama može doći do problema te prilikom linearizacije mogu pojaviti velike pogreške u estimaciji očekivane vrijednosti i varijance transformirane slučajne varijable po normalnoj razdiobi. Kao posljedica tih grešaka može doći do pada performansi EKF-a. Kao što je ranije spomenuto, UKF koristi nederivacijsku metodu linearizacije gdje umjesto aproksimacije nelinearnog sustava, aproksimira Gaussovu razdiobu, navodi [16]. Slikom 5.14 predstavljena je točnost nederivacijske transformacije.



Slika 5.14: Različite vrste linearizacije

Izvor: [29]

Potrebno je definirati  $X_K^a = [X_K^T v_K^T w_K^T]^T$ , matricu stanja proširenu vektorima šuma procesa i mjerenja kako bi se pomoću nje izračunala odgovarajuća sigma matrica  $\mathcal{X}_K^a$ .

Prema [29], prvi korak algoritma UKF- a je kao i kod EKF-a inicijalizacija početnih vrijednosti:

$$\bar{X}_K = E[X_0] \quad (116)$$

$$P_K = E[(X_0 - \bar{X}_0)(X_0 - \bar{X}_0)^T] \quad (117)$$

$$\bar{X}_0^a = E[X^a] = [\bar{X}_0^T \ 0 \ 0]^T \quad (118)$$

$$P_0^a = E[(X_0 - \bar{X}_0)(X_0 - \bar{X}_0)^T] = \begin{bmatrix} P_0 & 0 & 0 \\ 0 & R^v & 0 \\ 0 & 0 & R^w \end{bmatrix} \quad (119)$$

Računanje sigma točaka – predstavlja drugi korak gdje se prema sljedećem izrazu izračunavaju sigma točke:

$$\mathcal{X}_{K-1}^a = \begin{bmatrix} \bar{X}_{K-1}^a & \bar{X}_{K-1}^a - \gamma\sqrt{P_{K-1}^a} & \bar{X}_{K-1}^a - \gamma\sqrt{P_{K-1}^a} \end{bmatrix} \quad (120)$$

Osvježavanje vremena se odvija prema sljedećim izrazima, [17]:

$$\mathcal{X}_{K|K-1}^x = F[\mathcal{X}_{K-1}^x, u_{K-1}, \mathcal{X}_{K-1}^v]; \quad (121)$$

$$\bar{X}_{\bar{K}} = \sum_{i=0}^{2L} W_i^{(m)} \mathcal{X}_{i,K|K-1}^x; \quad (122)$$

$$P_{\bar{K}} = \sum_0^{2L} W_i^{(c)} [\mathcal{X}_{i,K|K-1}^x - \bar{X}_{\bar{K}}][\mathcal{X}_{i,K|K-1}^x - \bar{X}_{\bar{K}}]^T; \quad (123)$$

$$\gamma_{K|K-1} = H[\mathcal{X}_{i,K|K-1}^x, \mathcal{X}_{K-1}^n]; \quad (124)$$

$$\bar{\gamma}_{\bar{K}} = \sum_{i=0}^{2L} W_i^{(m)} \gamma_{i,K|K-1}; \quad (125)$$

, a osvježavanje mjerenja prema sljedećim izrazima, [17]:

$$P_{\bar{Y}_{\bar{K}}\bar{Y}_{\bar{K}}} = \sum_0^{2L} W_i^{(c)} [\gamma_{i,K|K-1} - \bar{\gamma}_{\bar{K}}][\gamma_{i,K|K-1} - \bar{\gamma}_{\bar{K}}]^T; \quad (126)$$

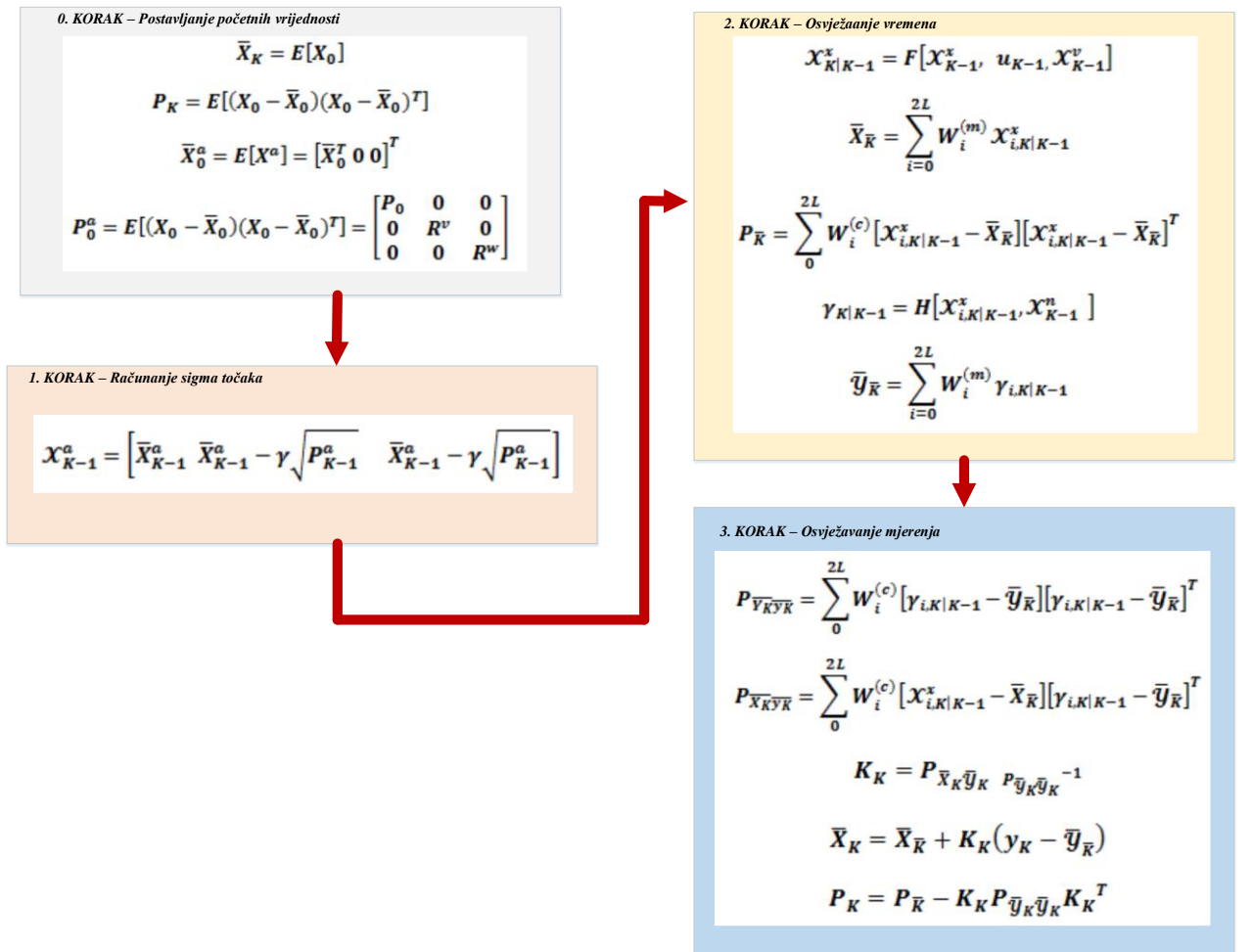
$$P_{\bar{X}_K \bar{Y}_K} = \sum_0^{2L} W_i^{(c)} [\mathcal{X}_{i,K|K-1}^x - \bar{X}_{\bar{K}}][\gamma_{i,K|K-1} - \bar{Y}_{\bar{K}}]^T; \quad (127)$$

$$K_K = P_{\bar{X}_K \bar{Y}_K} P_{\bar{Y}_K \bar{Y}_K}^{-1}; \quad (128)$$

$$\bar{X}_K = \bar{X}_{\bar{K}} + K_K (\gamma_K - \bar{Y}_{\bar{K}}); \quad (129)$$

$$P_K = P_{\bar{K}} - K_K P_{\bar{Y}_K \bar{Y}_K} K_K^T \quad (130)$$

gdje su  $\mathcal{X}^a = [(\mathcal{X}^x)^T (\mathcal{X}^v)^T (\mathcal{X}^w)^T]^T$ ,  $R^v$  kovarijanca šuma procesa i  $R^w$  je kovarijanca šuma mjerenja.



Slika 5.15: Algoritam UKF-a

Izvor: Autor

### 5.2.9 Primjer estimacije GPS pozicije pomoću Nederivacijskog Kalmanovog filtra (UKF)

Ovaj primjer je identičan prethodnom, samo što se umjesto EKF-a koristi UKF za izračun estimata.

Svi su ulazni podaci identični, te se matrice i funkcije postavljaju na isti način. Koristi se isti model procesa (CV). Za razliku od prijašnjeg primjera, gdje se u petlji poziva funkcija *EKF* u ovom se primjeru koristi funkcija *UKF*, koja je preuzeta s [30] te prilagođena simulaciji. Nalazi se u datoteci *UKF.m*, prikazana u prilogu [C.7].

```
function [x,P]=UKF(fstate,x,P,hmeas,z,Q,R)
```

Tablica 5.2.7: Ulazni i izlazni parametri UKF funkcije

Izvor: [27]

ULAZNI PARAMETRI	
fstate	prije definirana funkcija prijelaznih stanja koja uzima varijablu stanja $X_K$ i vraća vrijednosti $f(X_K)$
hmeas	prije definirana funkcija mjerenja pseudoudaljenosti koja uzima varijablu stanja $X_K$ i vraća vrijednosti $hmeas(X_K)$
Q, R	kovarijance procesnog šuma i šuma mjerenja
x, P	„a priori“ estimacija stanja i kovarijance stanja
z	trenutno mjerenje
IZLAZNI PARAMETRI	
x	varijabla postaje „a posteriori“ estimacija stanja
P	varijabla postaje „a posteriori“ estimacija kovarijance stanja

Također, potrebno je postaviti vrijednosti potrebne za izračunavanje transformacije i sigma točaka.

```
L=numel(x); %broj stanja
m=numel(z); %broj mjerenja
```

Prema [30], postavljanje parametara potrebnih za UT transformciju:

```
alpha=1e-3; %može se optimizirati
ki=0; %može se optimizirati
beta=2; %može se optimizirati
```

Parametar  $\lambda$  opisan u izrazu (109):

```
lambda=alpha^2*(L+ki)-L; %faktor skaliranja
c=L+lambda; %faktor skaliranja
```

Slijedi izračunavanje otežavanja osrednjavanja očekivanja i kovarijance prema izrazima (113) gdje se uvodi supstitucija  $c = L + \lambda$ :

```
%Izracunavanje tezina osrednjavanja ocekivanja
Wm=[lambda/c 0.5/c+zeros(1,2*L)];
```

i izrazu (114):

```
Wc=Wm;
% Izracunavanje tezina osrednjavanja kovarijance
Wc(1)=Wc(1)+(1-alpha^2+beta
c=sqrt(c);
```

### 5.2.9.1 Realizacija nederivirajuće transformacije i sigma točaka

Sada kad su izračunati svi potrebni parametri, u simulaciju se može pozvati funkcija za izvođenje UT transformacije.

```
function [y, Y, P, Y1]=ut(f, X, Wm, Wc, n, R)
```

gdje su ulazni parametri:



Tablica 5.2.8: Ulazni i izlazni parametri ut funkcije

Izvor: [30]

ULAZNI PARAMETRI	
f	nelinearna mapa
X	sigma točke
Wm, Wc	težine osrednjavanja očekivanja i kovarijance
n	broj izlaza f
R	dodana kovarijanca
IZLAZNI PARAMETRI	
y	transformirano očekivanje
Y	transformirane točke uzorkovanja
P	transformirana kovarijanca
Y1	transformirane devijacije

```
%Funkcija nederivirajuće transformacije
```

```
L=size(X,2);
y=zeros(n,1);
Y=zeros(n,L);
for k=1:L
    Y(:,k)=f(X(:,k));
    y=y+Wm(k)*Y(:,k);
end
Y1=Y-y(:,ones(1,L));
P=Y1*diag(Wc)*Y1'+R;
```

Kako bi bilo moguće izvođenje nederivirajuće transformacije potrebno je izračunati sigma točke. Prema [30], izrađena je posebna funkcija za izračunavanje sigma točaka:

```
%Sigma tocke oko referentne tocke
%Ulazi:
%     x: referentna tocka
%     P: kovarijanca
%     c: koeficijent koji je ranije izracunat

%Izlaz:
%     X: Sigma tocke u okolini x
function X=sigmas(x,P,c)
    A = c*chol(P)';
    Y = x(:,ones(1,numel(x)));
    X = [x Y+A Y-A];
```

sada funkcija za izračunavanje nederivirajuće transformacije sadrži sve potrebne ulazne parametre i može se pokrenuti.

### 5.2.9.2 Implementacija algoritma UKF-a

U ovom će se dijelu izvršiti estimacija pomoću UKF-a. Prvo se poziva funkcija koja izračunava sigma točke oko referentne točke.

```
%Pozivanje funkcije za izracun sigma tocaka oko x
X=sigmas(x,P,c);
```

gdje je potrebno pozvati funkciju *ut* koja će izračunati nelinearnu transformaciju procesa:

```
%Izvodjenje nederivirajuće transformacije procesa
[x1,X1,P1,X2]=ut(fstate,X,Wm,Wc,L,Q);
```

isto je potrebno i za transformaciju mjerenja:

```
%Izvodjenje nederivirajuće transformacije mjerenja
[z1,Z1,P2,Z2]=ut(hmeas,X1,Wm,Wc,m,R)

%Transformirana kovarijanca između dva vektora
P12=X2*diag(Wc)*Z2';
K=P12*inv(P2);
```

, zadnji korak je osvježavanje stanja i kovarijance:

```
x=x1+K*(z-z1); %estimacija stanja
P=P1-K*P12'; %estimacija kovarijance
```

čime završava proces estimacije pomoću UKF-a.

### 5.3 Komparativna analiza dobivenih rezultata

U ovom se poglavlju prikazuju rezultati simulacije estimacije pozicije. Također, biti će prikazana i relativna greška estimacije X, Y, Z koordinata. Kao što je ranije opisano, na osnovu izračunatih pozicija satelita te izmjerenih vrijednosti pseudoudaljenosti moguće je estimirati poziciju prijamnika. Korištene su dvije metode:

- Estimacija pozicije pomoću proširenog Kalmanovog filtra (EKF)
- Estimacija pozicije pomoću nederivirajućeg nelinearnog Kalmanovog filtra (UKF)

Ulazni podaci kao i primjer estimacije pomoću EKF-a preuzeti sa [27]. Kasnije, funkcija UKF-a kao primjer zasebno je preuzeta s izvora [30], nakon čega je slijedilo prilagođavanje i implementacija u skriptu za estimaciju pozicije. U simulaciju je dodano i preračunavanje koordinata iz ECEF koordinatnog sustava u geografski koordinatni sustav. Cilj ove simulacije je usporedba performansi EKF-a i UKF-a pri estimaciji pozicije GPS prijamnika. Za izradu simulacije odnosno izradu m skripti korišten je Matlab v.2013b. Datoteka simulacije nazvana je *GPS\_est\_EKF\_UKF.m*, te se nalazi prikazana u prilogu [C.3].

#### 5.3.1 Preračunavanje koordinata iz ECEF koordinatnog sustava u geografski koordinatni sustav

U normalnom radu, svaki GPS prijamnik estimirane koordinate preračunava u geografski koordinatni sustav (*eng. Longitude, Latitude, Altitude, LLA*) na osnovu modela geoida WGS-84 kao što je i ranije spomenuto, kako bi se dobio podatak o koordinatama pozicije razumljiv korisniku, zapisan pomoću zemljopisne dužine, širine i eventualno visine. U simulaciji se preračunavanje koordinata odvija se pomoću sljedećeg koda:

```
% Preracunavanje pozicije iz ECEF koordinatnog sustava u %  
geografski koordinatni sustav (LLA) za estimirane koordinate  
  
for ii = 1:N  
  
    ECEFx = Pos_EKF(1,ii);  
    ECEfy = Pos_EKF(2,ii);  
    ECEFz = Pos_EKF(3,ii);  
    ecoord = latlong(ECEFx,ECEfy,ECEFz)  
    Pos_LLA_EKF(:,ii) = ecoord ([1 2 3]);  
end
```

gdje se preračunate koordinate spremaju se u matricu *Pos\_LLA\_EKF*, odnosno u slučaju UKF-a u matricu *Pos\_LLA\_UKF*.

Kod funkcije ECEF\_LLA izrađen je prema algoritmu prikazanom u [7]:

```
% PRERACUNAVANJE KOORDINATA IZ ECEF SUSTAVA U LLA
function ecoord = ECEF_LLA(ECEFx,ECEfy,ECEfz)
% Definiranje fizikalnih konstanti koje su potrebne u izracunu
% Najduza os elipsoida WGS 84
    AA = 6378137.00000; % m
% Najkraca os elipsoida WGS 84
    BB = 6356752.31425; % m
% Kvadrat zemljinog orbitalnog ekscentriteta
    esquare=(AA^2 - BB^2) / AA^2;
% Konstanta za pretvaranje rad u sek.
    degrad = pi/180.0; % kutni faktor konverzije
% Izracun LLA koordinata
% Izracunavanje Z.duzine u radijanima
    long = atan(ECEfy / ECEFx);
% Izracunavanje Z.sirine u radijanima
    p = sqrt(ECEFx^2 + ECEfy^2);
% Aproksimacija visine
    lat0 = atan((ECEfz / p) / (1 - esquare));
    stop = 0;
    while (stop == 0)
        N0 = AA^2 / (sqrt(AA^2 * (cos(lat0))^2 + ...
            BB^2 * (sin(lat0))^2));
        altitude = (p / cos(lat0)) - N0; % visina
% Izracunavanje točne visine
        term = (1 - esquare * (N0 / (N0 + altitude)))^(-
            1);
        lat = atan(ECEfz / p * term); % visina u (rad)
% Provjera točnosti rezultata
        if (abs(lat - lat0) < 1.0e-12)
            stop = 1;
        end
        lat0 = lat;
    end
% Konverzija Z.duzine i Z.sirine u stupnjeve
    latitude = lat / degrad;
    longitude = long / degrad;
% Koordinate pozicije u LLA koordinatnom sustavu
    ecoord = [ latitude longitude altitude ];
return;
```

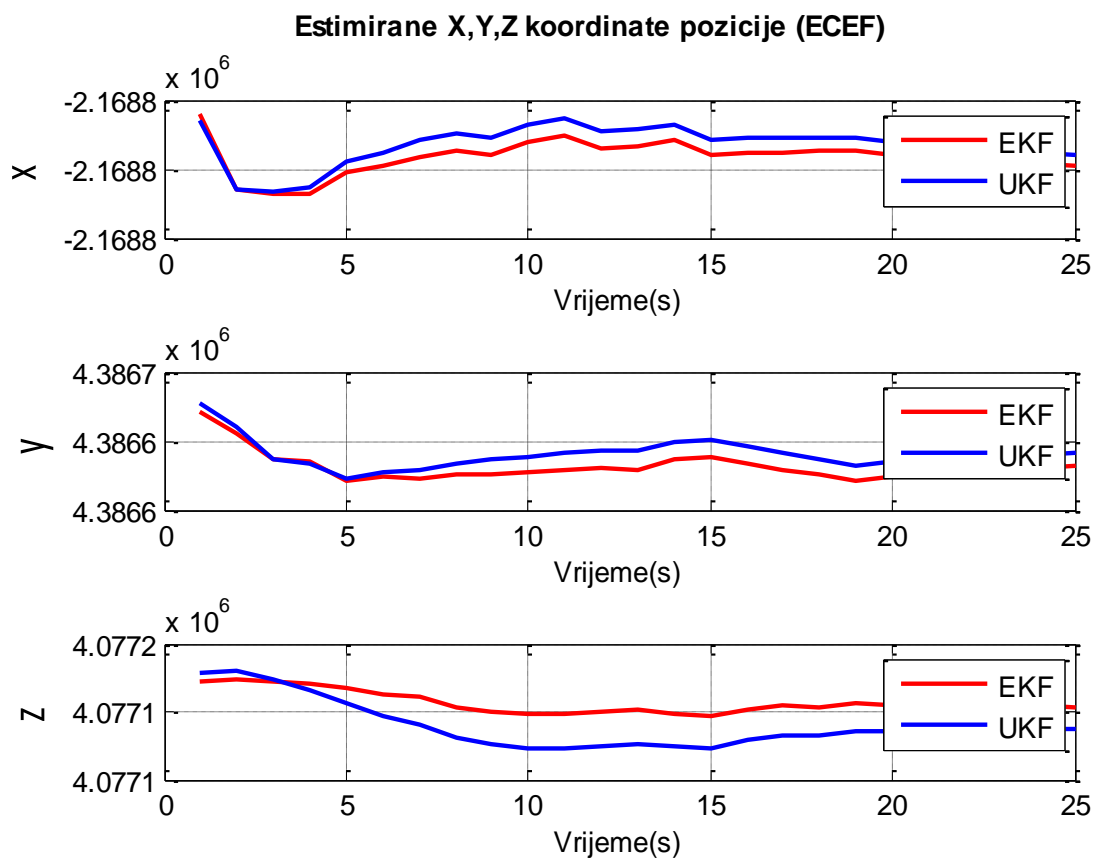
### 5.3.2 Analiza rezultata estimacije pozicije u ECEF i LLA koordinatnom sustavu

Nakon pokretanja, simulacija se odvija prema koracima iz poglavlja 5.2.7 i 5.2.9. Važno je spomenuti kako se estimacija odvija za svaki definirani vremenski trenutak, te se rezultati odnosno estimirane koordinate spremaju u matrice *Pos\_EKF* za EKF te *Pos\_UKF* za UKF filtar. Za prikaz rezultata simulacije potrebno je estimacije tih pozicija u vremenu grafički prikazati kako bi se lakše obavila analiza rezultata. Sljedeći kod prikazuje način na koji se grafički prikazuju vrijednosti:

```
% Grafički prikaz estimiranih pozicija (ECEF) u vremenu
figure;
for ii = 1:3
    subplot(3,1,ii)
    plot(1:N, Pos_EKF(ii,:), '-r', 'Linewidth', 1.5)
    hold on; grid on;
    plot(1:N, Pos_UKF(ii,:), '-b', 'Linewidth', 1.5)
    hold on; grid on;

    legend('EKF', 'UKF')
    xlabel('Vrijeme (s)')
    ylabel('Xe, Ye, Ze')
end
ha = axes('Position', [0 0 1 1], 'Xlim', [0 1], 'Ylim', [0
1], 'Box', 'off', 'Visible', 'off', 'Units', 'normalized', 'clipping' ,
'off');
text(0.5, 1, '\bf Estimirane pozicije X,Y,Z koordinata u ECEF
koordinatnom
sustavu', 'HorizontalAlignment', 'center', 'VerticalAlignment',
'top');
```

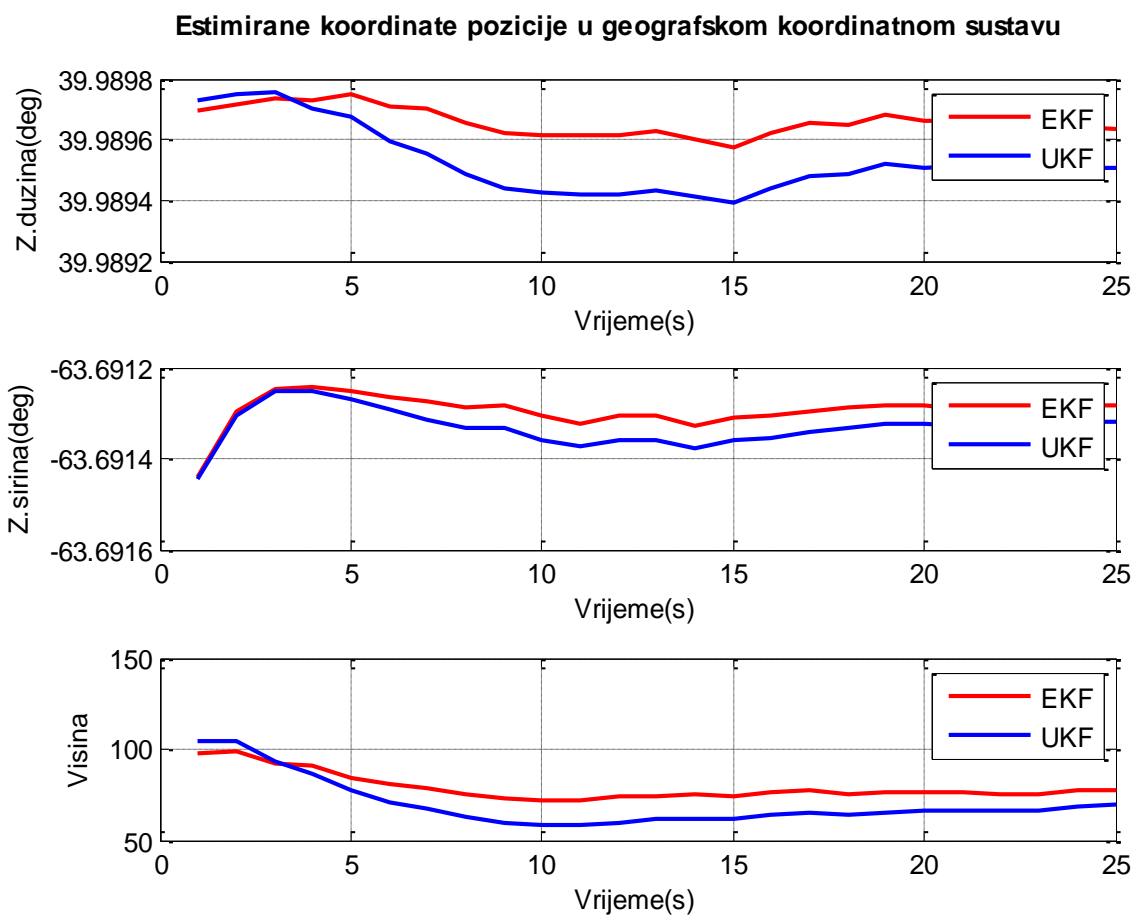
Nakon pokretanja simulacije dobiveni su sljedeći rezultati:



Slika 5.16: Prikaz estimiranih vrijednosti koordinata GPS prijamika(ECEF)

Izvor: Autor, Prilog:[D.1]

Estimirana pozicija se nalazi u ECEF koordinatnom sustavu. Slika 5.17 prikazuje estimirane pozicije u LLA koordinatnom sustavu. Kod za izradu grafičkog prikaza je identičan, samo što se umjesto matrica  $Pos\_EKF$  i  $Pos\_UKF$  grafički prikazuju matrice  $Pos\_LLA\_EKF$  i  $Pos\_LLA\_UKF$ .



*Slika 5.17: Prikaz estimiranih vrijednosti pozicije GPS prijavnika (LLA)*

*Izvor: Autor, Prilog: [D.2]*

Iz slike 5.16 i 5.17 može se zaključiti kako grafovi estimacije pozicije dobiveni pomoću EKF-a i UKF-a prate isti trend, ali ne daju potpuno istu estimaciju pozicije, što ukazuje na razlike u njihovom načinu rada. U sljedećem će se poglavlju predstaviti rezultati simulacije relativne greške pri estimaciji koja daje odgovor koji filter ima bolje performanse u ovom primjeru.

### **5.3.3 Analiza relativne greške pri estimaciji pozicije**

Pošto ne postoji podatak o točnoj poziciji, iz prethodnih grafova estimacije pozicije nije moguće sa sigurnošću odrediti koji filter točnije estimira poziciju. Prema [27], određivanje performansi moguće je prikazom relativne greške pri estimaciji. Grafički prikaz se generira prema sljedećem kodu:

```

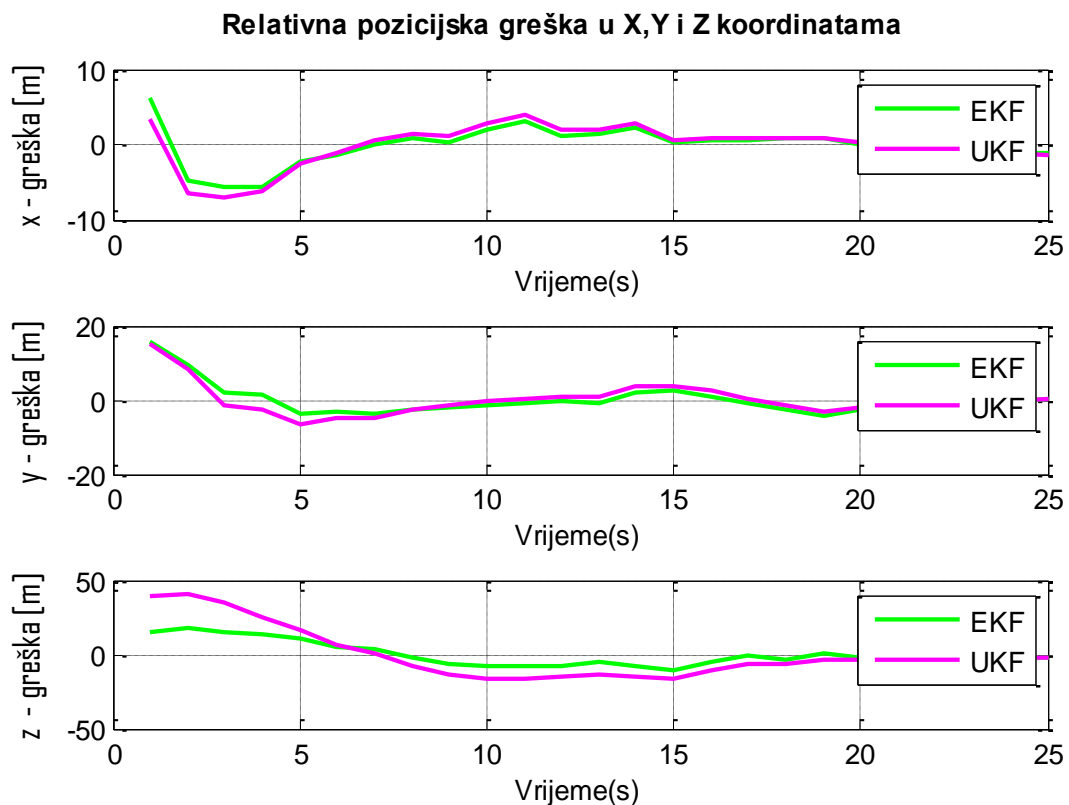
% Grafički prikaz relativne greške pri estimaciji pozicije
figure;
for ii = 1:3
    subplot(3,1,ii)
    plot(1:N, Pos_EKF(ii,:) - mean(Pos_EKF(ii,:)),
        '-g', 'Linewidth',1.5)
    hold on;grid on;
    plot(1:N, Pos_UKF(ii,:) - mean(Pos_UKF(ii,:)),
        '-m', 'Linewidth',1.5)

    hold on;grid on;

    legend('EKF','UKF')
    xlabel('Vrijeme(s)')
    ylabel('Greška (metara)')
end
ha = axes('Position',[0 0 1 1],'Xlim',[0 1],'Ylim',[0
1],'Box','off','Visible','off','Units','normalized','clipping',
'off');
text(0.5, 1,'\bf Relativna pozicijska greška u X,Y i Z
koordinatama','HorizontalAlignment','center','VerticalAlignment',
'top');

```

te prilikom pokretanja simulacije daje sljedeće rezultate:



Slika 5.18: Prikaz relativne greške pri izračunu GPS pozicije pomoću EKF-a i UKF-a

Izvor: Autor, Prilog: [D.3]



Ako se sada analizira slika 5.18, može se vidjeti kako grafovi opet prate isti trend. U prilogu [D.3] se nalazi slika 5.18 s detaljnijim prikazom. U prvih 5 sekundi estimacije EKF ima manji iznos greške, pogotovo za Z koordinatu. U vremenu od 5. – 15. sekunde greška je nešto manja kod estimacije EKF-om. Može se primijetiti kako se nakon 20. sekunde greška kod oba filtra znatno smanjuje te postaje približno ista i teži ka nuli.

Zaključak je da se oba filtra s vremenom konfiguriraju te estimacija pozicije postaje sve točnija što je cilj i prednost estimacije pomoću Kalmanovog filtra. Estimacija GPS pozicije pomoću EKF-a se u ovom slučaju pokazala kao bolji način estimacije, s nešto manjom greškom nego je to slučaj pri estimaciji pomoću UKF-a.

Poznato je da se u ovom primjeru estimacije za model procesa koristi model konstantne brzine (CV), na osnovu pretpostavke da je brzina putovanja signala od satelita do prijarnika uvijek ista (brzina svjetlosti). Na osnovu te činjenice bilo je za očekivati da će nešto bolje rezultate dati estimacija pomoću EKF-a, zato što se na osnovu konstantne prirode širenja signala vrlo precizno vrši linearizacija modela procesa, što je i sama simulacija pokazala. To je i jedan od razloga što se estimacija pomoću EKF-a koristi u realnim uvjetima odnosno u većini civilnih GPS prijarnika. U slučaju kada bi nelinearni sustav imao kompliciraniji model procesa, UKF bi realizirao bolje rezultate estimacije, zato što bi zbog linearizacije kod EKF-a u takvom sustavu došlo do odstupanja točnosti. Simulacija je pokazala da je implementacija UKF-a za potrebe estimacije pozicije u GPS prijarniku nepotrebna zbog veće robusnosti i složenosti samog filtra, pa se preporučuje korištenje EKF-a.

## 6. ZAKLJUČAK

Navigacija je neizbježna kako bi se promet te ostale operacije gdje je bitan podatak o položaju odvijao optimalno. Postoje mnogi sustavi koji omogućuju određivanje pozicije na različite načine. Najpopularniji navigacijski sustav je američki GPS, kojeg karakterizira dobra pokrivenost satelitima i točnost. Sastoji se od dva koda odnosno dvije razine točnosti. Koristi se u svim područjima gdje je potrebno pozicioniranje, od vojske koja koristi precizniji P kod do civilne upotrebe za koju je namijenjen C/A kod. Konkurentski sustav je ruski GLONASS kojeg karakterizira sličan princip rada kao GPS sustav. Razlikuje se u konstelaciji satelita i signalima na drukčijim frekvencijama. Ovaj je sustav manje komercijaliziran, ponajviše zbog financijskih problema u prošlosti zbog čega nije bila postignuta puna funkcionalnost. U zadnjih nekoliko godina sustav je obnovljen te se u njega puno uložilo zbog čega je postigao punu funkcionalnost, pa se u zadnje vrijeme sve više koristi. Treći sličan sustav je europski GALILEO koje još uvijek nije postigao punu funkcionalnost, pa se ne koristi u komercijalne svrhe.

Naime, pošto se signali ovih sustava šire iz svemira postoje određene smetnje odnosno prirodni utjecaji kao što su utjecaj ionosfere, troposfere, zemljina zakrivljenost, greške geometrije, greške sata. U lošim uvjetima dolazi do grešaka čime se javlja potreba za kompenzacijom. Koristeći sustave pozicioniranja u svrhe dinamičkog pozicioniranja potrebna je ekstremna točnost u svim uvjetima kako bi se postigla sigurnost i pouzdanost operacija u tijeku. Postoji više tehnika poboljšanja preciznosti, a najčešće se koristi diferencijalni DGPS/DGLONASS sustavi. Na osnovu podataka poslanih s referentnih stanica kompenziraju nastale greške propagacije signala. Ako se radi o operacijama između dva plovila koristi se relativni GPS gdje preko UHF komuniciraju dva navigacijska sustava.

Nadalje kako bi bilo moguće ostvariti navigaciju potrebno je izračunati točnu poziciju GPS prijamnika. Izračun pozicije odvija se u samom GPS prijamniku na osnovu jednadžbe pseudoudaljenosti i izračunatih pozicija satelita. Svi sateliti šalju navigaciju poruku te u njoj i podatke o efemeridama iz kojih se u prijemniku izračunavaju koordinate satelita u ECEF koordinatnom sustavu za različite vremenske trenutke. Pri izračunu koordinata u obzir se uzimaju i smetnje zbog kojih dolazi do grešaka, pa se paralelno vrši kompenzacija tih grešaka koje utječu na točnost proračunate pozicije.

Nakon izračunatih pozicija potrebno je na osnovu izmjerenih pseudoudaljenosti izvršiti estimaciju pozicije GPS prijemnika. Za to postoje razne metode, od kojih su u ovome radu predstavljene 3: metoda vjerojatnosti (najvjerojatnija pozicija), estimacija pomoću proširenog Kalmanovog filtra (EKF) i estimacija pomoću nederivacijskog nelinearnog Kalmanovog filtra (UKF).

Pošto se pokazalo da metoda vjerojatnosti nije dovoljna pouzdana metoda, potrebno je estimaciju izvršiti kompleksnijim metodama gdje spada korištenje Kalmanovih filtra. Linearni Kalmanov filter (LKF) se koristi za probleme estimacije i filtriranja linearnih sustava zbog čega njegova primjena nije moguća za estimaciju GPS pozicije zbog toga što je proces nelinearan. Zbog toga se u ovome radu obrađene dvije verzije nelinearnog Kalmanovog filtra, EKF i UKF. EKF je nelinearna verzija LKF-a radi na principu linearizacije modela procesa i modela mjerenja oko estimacije i kovarijance prethodnog vremenskog trenutka da bi se na kraju estimirala vrijednost stanja. Može se reći i kako se na osnovu povremenih mjerenja uz prisutne šumove procesa i mjerenja estimiraju vrijednosti nepoznatih varijabli. Druga verzija KF-a koji se može obračunati s nelinearnošću sustava je UKF koji koristi statističku linearizaciju što uključuje nederivirajuću transformaciju i proračun sigma točaka kako bi se postigla estimacija. U radu je prikazan primjer implementacije EKF i UKF-a za estimaciju pozicije. Na osnovu ulaznih podataka o pozicijama satelita, izmjerenim pseudoudaljenostima, modela konstantne brzine (procesni model), modela mjerenja pseudoudaljenosti simulacijom u Matlabu se došlo se do estimiranih vrijednosti pozicije GPS prijamnika. Cilj je bio usporedba performansi EKF-a i UKF-a u službi estimacije GPS pozicije. Simulacija je pokazala kako je greška kod estimacije nešto manja kod estimacije EKF-om, što je bilo i za očekivati zbog procesnog modela konstantne brzine. Zaključak je kako je nepotrebno implementirati UKF jer je robusniji i kompleksniji. EKF daje sasvim dobre rezultate estimacije pozicije što potvrđuje i podatak kako je najčešća metoda estimacije u realnim sustavima koristi upravo EKF.

Daljnja istraživanja se mogu usmjeriti na implementaciju čestičnog filtra (*eng. Particle Filter*) te ispitivanje njegovih performansi u odnosu na EKF i UKF. Zbog mogućnosti podešavanja raznih parametara sustava i samih filtra moguće je usmjeriti se i na optimizaciju već obrađenih EKF i UKF filtra kako bi se postigli još bolji rezultati estimacije. Moguće je ispitivanje drugih modela procesa, npr. model pozicije-brzine-akceleracije (*eng. Position Velocity Acceleration, PVA*) u slučajevima kada se GPS prijamnik miče u prostoru.

## LITERATURA

- [1] **NAVSTAR GPS USER EQUIPMENT INTRODUCTION**, Public release, USA, 1996.
- [2] Mobinder, S. Grewal; Lawerence, R. Weill; Angus, P. Andrews : **Global Positioning Systems, Inertial Navigation, and Integration**, Second Edition, John Wiley & Sons, Canada, 2007.
- [3] **Guide to dynamic positioning of vessels**, Alstom, 2000.
- [4] El-Rabbany, A.: **Introduction to GPS**, ARTECH HOUSE, 2002.
- [5] Lušić, Z.; Kos, S.; Krile S. : **Struktura analiza metoda pozicioniranja na moru**, „Naše more“ 55(1-2)/2008, 2008.
- [6] Kaplan, E. D.; Christopher J.: **Understanding GPS: Principles and applications**, ARTECH HOUSE, 2006.
- [7] Farrell, A. J.: **Aided navigation: GPS with High rate sensors**, McGraw-Hill, 2008.
- [8] Kujawa, L.; Rogowski, J. B.; Kopanska, K.: **Positioning using GPS and GLONASS systems**, TransNav Vol.3, 2009.
- [9] Cadet, O.: **Introduction to Kalman Filter and its Use in Dynamic Positioning Systems**, DYNAMIC POSITIONING CONFERENCE, 2003.
- [10] Valčić, M.: **Linearni Kalmanov filter s primjenama u navigaciji**, Interna predavanja (radionica), Pomorski Fakultet u Rijeci, Rijeka, 2013.
- [11] Welch, G.; Bishop G.: **An Introduction to the Kalman Filter**, University of North Carolina, 2001.

- [12] Grewal, M. S.; Andrews, A. P.: **Kalman Filtering: Theory and Practice Using MATLAB**, Third Edition, John Wiley & Sons, 2008.
- [13] Chui, C. K.; Chen, G.: **Kalman Filtering with Real-Time Applications**, fourth edition, Springer, 2009.
- [14] Verhaegen, M.; Verdult, V.: **Filtering and system identification**, Cambridge University Press, 2009.
- [15] Brown, G. R.; Hwang, P. Y.C.: **Introduction to Random Signals and Applied Kalman Filtering**, Fourth edition, John Wiley & Sons, 2012.
- [16] Julier, S. J.; Uhlmann, J. K.: **Unscented Filtering and Nonlinear estimation**, Proceedings of the IEEE, 92(3):401-422, 2004.
- [17] Wan, E.; Van der Merve R.: **The Unscented Kalman Filter**, Wiley Publishing, 2001.

### **Internet izvori:**

- [18] [http://www.kowoma.de/en/gps/waas\\_egnos.htm](http://www.kowoma.de/en/gps/waas_egnos.htm), (12.1.2013.).
- [19] <http://www.kowoma.de/en/gps/errors.htm>, (12.6.2013).
- [20] <http://www.cmmacs.ernet.in/cmmacs/pdf/gpserrors.pdf>, (12.6.2013).
- [21] <http://www.dtic.mil/dtic/tr/fulltext/u2/a273370.pdf>, (23.6.2013).
- [22] [http://www.aimagin.com/learn/index.php?title=A\\_simple\\_GPS\\_Simulation\\_Model](http://www.aimagin.com/learn/index.php?title=A_simple_GPS_Simulation_Model), (22.8.2013).
- [23] <http://www.ce.boun.edu.tr/otay/Teaching/CE505/02/Y%C4%B1ld%C4%B1r%C4%B1m-Kurt.pdf>, (15.9.2013).

- [24] [http://homepages.inf.ed.ac.uk/rbf/CVonline/LOCAL\\_COPIES/WELCH/Kalman.2.htm](http://homepages.inf.ed.ac.uk/rbf/CVonline/LOCAL_COPIES/WELCH/Kalman.2.htm)  
1, (4.9.2013).
- [25] [http://ethesis.nitrkl.ac.in/1961/1/COVER\\_PAGE\\_merged.pdf](http://ethesis.nitrkl.ac.in/1961/1/COVER_PAGE_merged.pdf), (5.9.2013).
- [26] <http://web.cecs.pdx.edu/~ssp/Reports/2006/Monaghan.pdf>, (11.9.2013).
- [27] <http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/31487-extended-kalman-filterekf-for-gps>, (10.5.2013).
- [28] <http://www.newtonphysics.on.ca/illusion/>, (4.9.2013).
- [29] <http://signal.hut.fi/kurssit/s884221/ukf.pdf>, (10.9.2013).
- [30] <http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/18217-learning-the-unscented-kalman-filter>, (10.9.2013).

## POPIS SLIKA

<i>Slika 2.1: Konstelacija GPS satelita</i> .....	6
<i>Slika 2.2: Prikaz GPS kontrolnog segmenta</i> .....	7
<i>Slika 2.3: Prikaz navigacijske poruke</i> .....	9
<i>Slika 2.4: Struktura četvero fazne komponente L1 signala</i> .....	11
<i>Slika 2.5: Modulacija satelitskog GPS signala</i> .....	12
<i>Slika 2.6: Demodulacija satelitskog GPS signala</i> .....	13
<i>Slika 2.7: Usporedba frekvencijskih spektara signala GPS, GLONASS i GALILEO sustava</i> ..	16
<i>Slika 3.1: Princip rada DGPS-a</i> .....	17
<i>Slika 3.2: Princip pokrivenosti SBAS sustava</i> .....	19
<i>Slika 3.3: Prikaz rada Relativnog GPS-a</i> .....	20
<i>Slika 4.1: SA prije i poslije deaktivacije</i> .....	21
<i>Slika 4.2: Prikaz propagacijskog puta signala</i> .....	24
<i>Slika 4.3: Raspršenost pozicije zbog ionosferskih utjecaja</i> .....	27
<i>Slika 4.4: Interferencija signala zbog odbijanja od raznih površina</i> .....	28
<i>Slika 4.5: Prikaz utjecaja odbijenog signala na rezultatni signal</i> .....	29
<i>Slika 4.6: Prikaz različitih geometrija satelita</i> .....	30
<i>Slika 4.7: Simulacija putanja satelita u Simulinku</i> .....	33
<i>Slika 4.8: Simulirane putanje satelita u 3D prostoru</i> .....	35
<i>Slika 4.9: Simulirane putanje satelita u 2D prostoru</i> .....	35
<i>Slika 4.10: Simulacija DOP vrijednosti GPS-a</i> .....	36
<i>Slika 4.11: Prikaz rezultata simulacije DOP vrijednosti</i> .....	37
<i>Slika 4.12: Simulacija estimacije pozicije i DOP grešaka</i> .....	38
<i>Slika 4.13: Prikaz greške X,Y,Z koordinata pozicije u odnosu na GDOP vrijednost</i> .....	39
<i>Slika 4.14: Prikaz odnosa grešaka pozicije u LLA koordinatama u odnosu na GDOP vrijednosti</i> .....	40
<i>Slika 5.1: Određivanje pozicije prijarnika</i> .....	41
<i>Slika 5.2: Područje u kojem se nalazi točna pozicija</i> .....	43
<i>Slika 5.3: Vrijednosti potrebne u izračunu pozicije</i> .....	43
<i>Slika 5.4: Sferni koordinatni sustav</i> .....	44
<i>Slika 5.5: Sjecišta krugova</i> .....	46
<i>Slika 5.6: Minimalni i maksimalni <math>\alpha</math> i <math>\beta</math> kutovi</i> .....	47
<i>Slika 5.7: Produkt vrijednosti pseudoudaljenosti</i> .....	47
<i>Slika 5.8: Raspodjela vjerojatnosti <math>\alpha</math> i <math>\beta</math></i> .....	49
<i>Slika 5.9: Algoritam KF-a</i> .....	52
<i>Slika 5.10: Usporedba KF-a i LP filtra</i> .....	55
<i>Slika 5.11: Grafički prikaz rada KF-a u vremenskim trenucima</i> .....	57
<i>Slika 5.12: Prikaz blok sheme KF-a</i> .....	60
<i>Slika 5.13: Algoritam rada EKF-a</i> .....	65
<i>Slika 5.14: Različite vrste linearizacije</i> .....	79
<i>Slika 5.15: Algoritam UKF-a</i> .....	81
<i>Slika 5.16: Prikaz estimiranih vrijednosti koordinata GPS prijarnika(ECEF)</i> .....	89

<i>Slika 5.17: Prikaz estimiranih vrijednosti koordinata GPS prijarnika(LLA).....</i>	<i>90</i>
<i>Slika 5.18: Prikaz relativne greške pri izračunu GPS pozicije pomoću EKF-a i UKF-a .....</i>	<i>91</i>

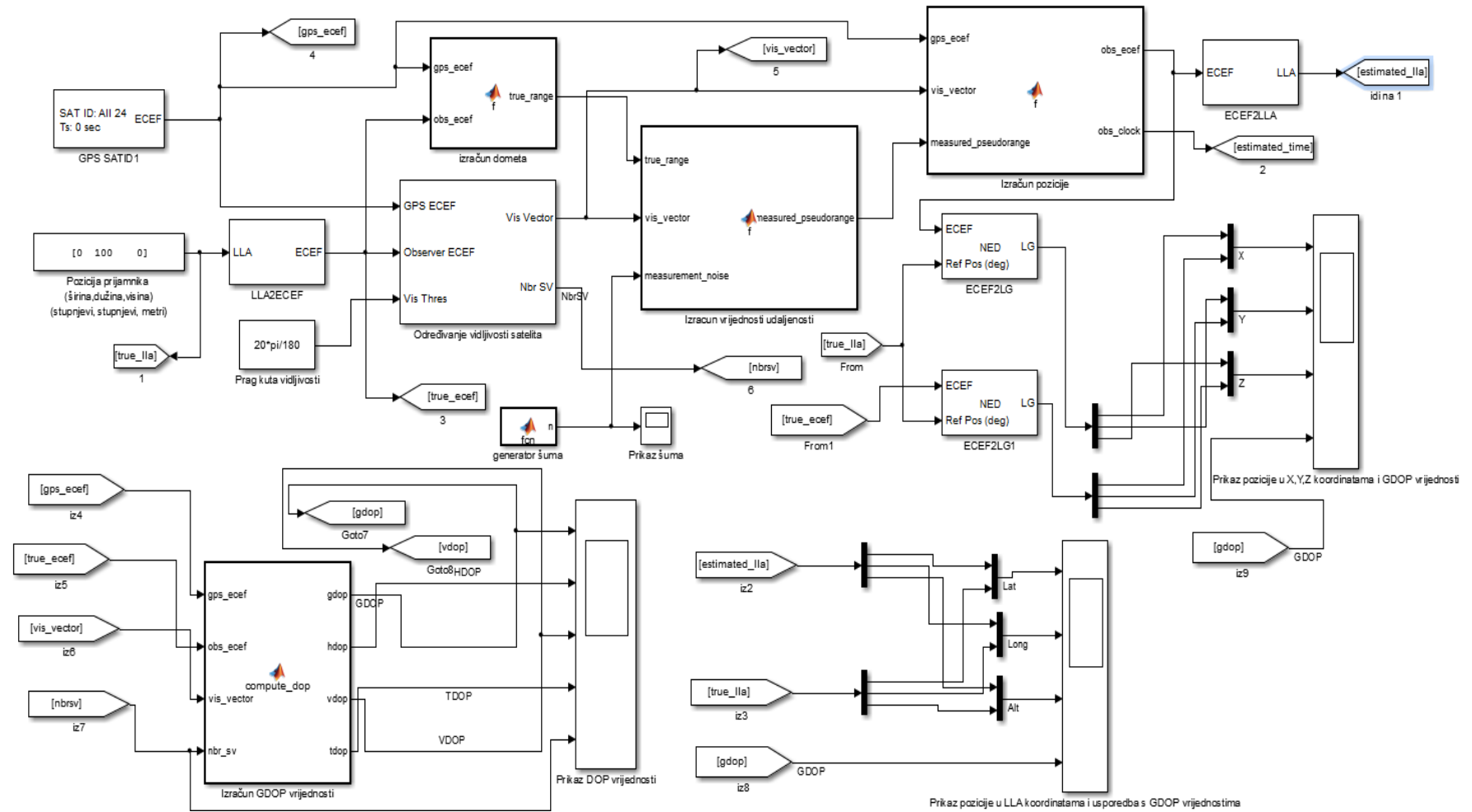
## **POPIS TABLICA**

<i>Tablica 5.1.1: Ulazni podaci za simulaciju estimacije pozicije metodom vjerojatnosti .....</i>	<i>48</i>
<i>Tablica 5.1.2: Usporedba stvarne i estimirane pozicije .....</i>	<i>48</i>
<i>Tablica 5.2.1: Kategorizacija varijabli KF-a .....</i>	<i>53</i>
<i>Tablica 5.2.2: Parametri navigacijske poruke potrebni za izračun pozicije satelita .....</i>	<i>66</i>
<i>Tablica 5.2.3: Algoritam za izračunavanje ECEF pozicije satelita.....</i>	<i>67</i>
<i>Tablica 5.2.4: Podaci o pozicijama satelita potrebni za simulaciju, SV_Pos.mat .....</i>	<i>68</i>
<i>Tablica 5.2.5: Podaci o izmjerenim pseudoudaljenstima, SV_rho.mat .....</i>	<i>69</i>
<i>Tablica 5.2.6: Ulazni i izlazni parametri EKF funkcije .....</i>	<i>75</i>
<i>Tablica 5.2.7: Ulazni i izlazni parametri UKF funkcije .....</i>	<i>82</i>
<i>Tablica 5.2.8: Ulazni i izlazni parametri ut funkcije .....</i>	<i>84</i>

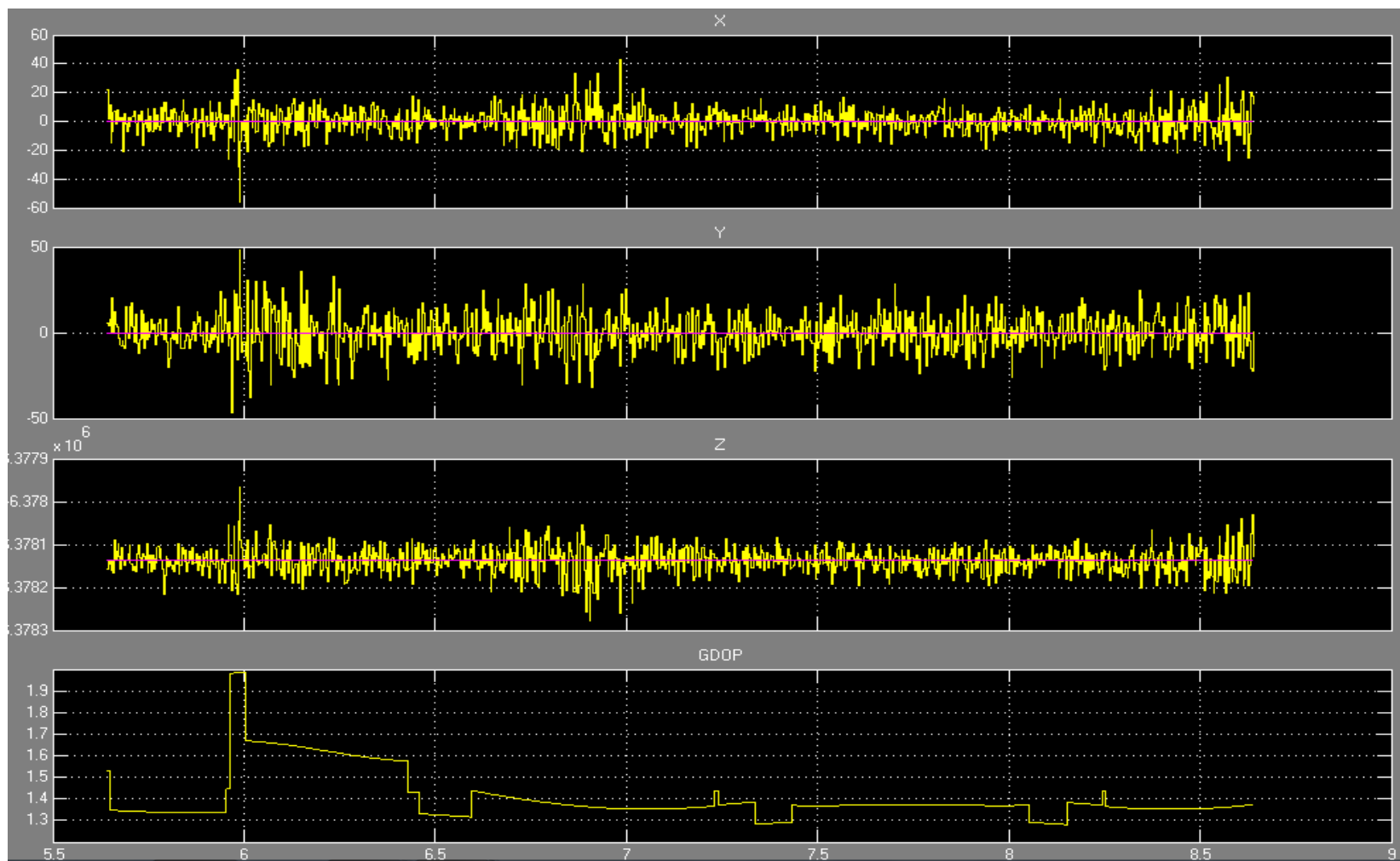


# PRILOZI

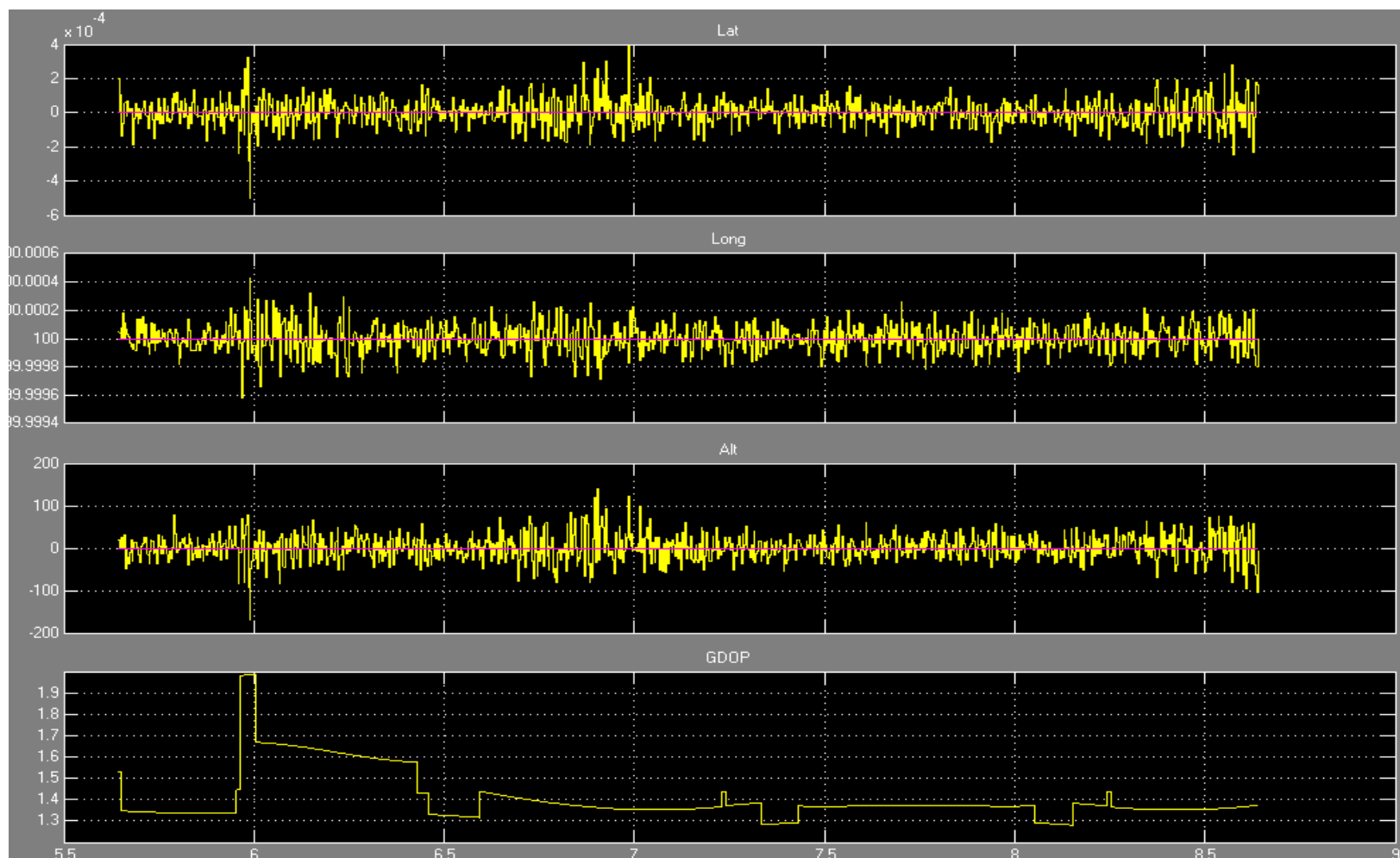
## Prilog A: Simulacija estimacije pozicije i DOP grešaka



### Prilog A.1: Prikaz X,Y,Z koordinata pozicije u odnosu na GDOP vrijednost



## Prilog A.2: Prikaz LLA koordinata pozicije u odnosu na GDOP vrijednost



## Prilog B: GPS\_est\_metoda\_vjerojatnosti

M-skripta za estimaciju pozicije metodom vjerojatnosti izrađena u Matlabu.

Ime datoteke: GPS\_est\_metoda\_vjerojatnosti.m

```
% METODA ESTIMCIJE POZICIJE METODOM VJEROJATNOSTI, [23]

%Odredjivanje broja i karakteristika satelita
ap=input('Unesi Z.duzinu pozicije GPS prijavnika \n');
%Potrebno zbog izracuna greške estimacije
bp=input('Unesi Z.sirinu pozicije GPS prijavnika \n');
%Potrebno zbog izracuna greške estimacije
n=input('Unesi broj satelita koji sudjeluju u estimaciji (min 4) \n');
    for i=1:n
        fprintf('Unesi visinu satelita %i u (m) \n',i)
        rs(i)=input('');
        fprintf('Unesi alfa kut satelita %i u (stupnjevima) \n',i)
        as(i)=input('');
        as(i)=(as(i)*2*pi)/360;
        fprintf('Unesi beta kut satelita %i u (stupnjevima) \n',i)
        bs(i)=input('');
        bs(i)=(bs(i)*2*pi)/360;
        fprintf('Unesi udaljenost izmedju satelita %i i tocke s koje se
uzima mjerenje signala,poslanog s satelita %i \n',i,i)
        d(i)=input('');
    end

%Radijus zemljine kugle i sigma za normalnu razdiobu vjerojatnosti
re=6371000;
s=50;

%Definiranje podrucja u kojem se nalazi prava pozicija, koja se inace moze
%pronaci pomocu max i min alfa i beta, koje je moguće dobiti preko sjecista
%krugova. U ovom se slucaju koriste alfa i beta pozicije.
ap=(ap*2*pi)/360;
bp=(bp*2*pi)/360;

% Izracun najvjerojatnijeg intervala za kalkulaciju vjerojatnosti
    for i=1:3
        a=ap-0.00004:0.000001:ap+0.00004;
        b=bp-0.00004:0.000001:bp+0.00004;
        sizea=length(a);
        sizeb=length(b);
        pab=ones(sizea,sizeb);

%Pronalazenje vjerojatnosti za alfa i beta parove
        for k=1:sizea
            for l=1:sizeb
                for i=1:n
                    dab(i)=(re^2+rs(i)^2-
2*re*rs(i)*(cos(b(l))*cos(a(k))*cos(bs(i))*cos(as(i))+cos(b(l))*sin(a(k))*c
os(bs(i))*sin(as(i))+sin(b(k))*sin(bs(i))))^(1/2);
```

```

        pdab(i)=normpdf(dab(i),d(i),s);
    if i==n
    for j=1:n
        pab(k,l)=pdab(j)*pab(k,l);
    end
    end
    end
    end
    end

%Pronalaznje najvjerojatnije pozicije
mostprobablepoint=max(max(pab));
    for k=1:sizea
        for l=1:sizeb
            if pab(k,l)==mostprobablepoint
                mostprobablealpha=a(k);
                mostprobablebeta=b(l);
            end
        end
    end

%Redefinicija inicijalnih parametara zbog optimizacije kalkulacije
ap=centera;
bp=centerb;
    for i=1:n
        d(i)=(re^2+rs(i)^2-
2*re*rs(i)*(cos(bp)*cos(ap)*cos(bs(i))*cos(as(i))+cos(bp)*sin(ap)*cos(bs(i))
)*sin(as(i))+sin(bp)*sin(bs(i))))^(1/2);
    end
end

%Konverzija iz radijana u stupnjeve

latp=mostprobablealpha*360/(2*pi);
longp=mostprobablebeta*360/(2*pi);
    if longp<0
        hemilongp=('Juzno');
    else
        hemilongp=('Sjeverno');
    end
    if latp<0
        hemilatp=('Zapadno');
    else
        hemilatp=('Istocno');
    end
    end
degreelongp=fix(longp);
minutelongp=fix((longp-degreelongp)*60);
secondlongp=(longp-degreelongp-minutelongp/60)*60; degreelatp=fix(latp);
minutelatp=fix((latp-degreelatp)*60);
secondlatp=(latp-degreelatp-minutelatp/60)*60;

%Prikaz rezultata estimacije najvjerojatnije tocke (pozicije)
fprintf('\n Estimirana pozicija koristeci metodu vjerojatnosti \n')
fprintf('%i %i %d %s \n',degreelongp,minutelongp,secondlongp,hemilongp)

```

```

fprintf('%i %i %d %s \n',degreelatp,minutelatp,secondlatp,hemilatp)

%Izracun greske estimacije
sum=0;
total=0;
    for k=1:sizea
        for l=1:sizeb
            if pab(k,l)>0.1*mostprobablepoint
                total=total+1;
                x1=re*cos(b(l))*cos(a(k));
                y1=re*cos(b(l))*sin(a(k));
                z1=re*sin(b(l));
                x2=re*cos(centerb)*cos(centera);
                y2=re*cos(centerb)*sin(centera);
                z2=re*sin(centerb);
                sum=sum+((x1-x2)^2+(y1-y2)^2+(z1-z2)^2)^(1/2);
            end
        end
    end
error=sum/total;
fprintf('Greska estimacije iznosi \n')
fprintf('%d',error)

```

**Prilog C.1 : Ulazni podaci simulacije; Pozicije satelita u ECEF koordinatama**

SV_Pos									
	X	Y	Z	X	Y	Z	X	Y	Z
	1 (s)			2 (s)			3 (s)		
SAT. 1	-11602023,95	14063117,49	18811434,31	-11602700,41	14060708,16	18812823,4	-11603377,03	14058298,7	18814212,08
SAT. 2	-20853271,57	1806977,212	16542682,12	-20855049,93	1805887,131	16540582,47	-20856828,12	1804797,28	16538482,46
SAT. 3	-14355926,02	8650961,884	20736354,98	-14356344,17	8648384,477	20737164,34	-14356762,48	8645806,99	20737973,26
SAT. 4	7475239,675	12966181,28	21931576,79	7472917,322	12967714,46	21931442,6	7470595,072	12969247,8	21931307,95
	4 (s)			5 (s)			6 (s)		
SAT. 1	-11604053,8	14055889,09	18815600,33	-11604730,73	14053479,35	18816988,17	-11605407,81	14051069,5	18818375,59
SAT. 2	-20858606,14	1803707,661	16536382,11	-20860383,99	1802618,273	16534281,41	-20862161,67	1801529,12	16532180,36
SAT. 3	-14357180,94	8643229,438	20738781,75	-14357599,54	8640651,806	20739589,8	-14358018,3	8638074,1	20740397,42
SAT. 4	7468272,927	12970781,22	21931172,82	7465950,886	12972314,8	21931037,23	7463628,95	12973848,5	21930901,18
	7 (s)			8 (s)			9 (s)		
SAT. 1	-11606085,05	14048659,44	18819762,6	-11606762,45	14046249,29	18821149,19	-11607440	14043839	18822535,36
SAT. 2	-20863939,19	1800440,19	16530078,97	-20865716,54	1799351,495	16527977,23	-20867493,71	1798263,03	16525875,14
SAT. 3	-14358437,21	8635496,319	20741204,59	-14358856,27	8632918,464	20742011,34	-14359275,48	8630340,53	20742817,64
SAT. 4	7461307,118	12975382,34	21930764,65	7458985,391	12976916,32	21930627,66	7456663,768	12978450,4	21930490,2
	10 (s)			11 (s)			12 (s)		
SAT. 1	-11608117,71	14041428,56	18823921,11	-11608795,57	14039017,98	18825306,45	-11609473,59	14036607,3	18826691,36
SAT. 2	-20869270,73	1797174,798	16523772,71	-20871047,57	1796086,796	16521669,93	-20872824,24	1794999,03	16519566,8
SAT. 3	-14359694,83	8627762,53	20743623,51	-14360114,34	8625184,451	20744428,95	-14360534	8622606,3	20745233,94
SAT. 4	7454342,25	12979984,65	21930352,28	7452020,836	12981519,02	21930213,89	7449699,528	12983053,5	21930075,03

	13 (s)			14 (s)			15 (s)			
SAT. 1	-11610151,77	14034196,43	18828075,87	-11610830,1	14031785,44	18829459,95	-11611508,59	14029374,3	18830843,61	
SAT. 2	-20874600,75	1793911,485	16517463,32	-20876377,09	1792824,176	16515359,5	-20878153,25	1791737,1	16513255,33	
SAT. 3	-14360953,81	8620028,071	20746038,51	-14361373,78	8617449,77	20746842,63	-14361793,89	8614871,39	20747646,32	
SAT. 4	7447378,324	12984588,14	21929935,7	7445057,225	12986122,9	21929795,91	7442736,231	12987657,8	21929655,65	
	16 (s)			17 (s)			18 (s)			
SAT. 1	-11612187,23	14026963,06	18832226,86	-11612866,03	14024551,67	18833609,69	-11613544,98	14022140,1	18834992,11	
SAT. 2	-20879929,25	1790650,25	16511150,82	-20881705,09	1789563,634	16509045,96	-20883480,75	1788477,25	16506940,75	
SAT. 3	-14362214,15	8612292,946	20748449,57	-14362634,56	8609714,422	20749252,39	-14363055,12	8607135,83	20750054,77	
SAT. 4	7440415,342	12989192,81	21929514,92	7438094,558	12990727,96	21929373,73	7435773,879	12992263,2	21929232,07	
	19 (s)			20 (s)			21 (s)			
SAT. 1	-11614224,1	14019728,46	18836374,1	-11614903,36	14017316,65	18837755,68	-11615582,79	14014904,7	18839136,84	
SAT. 2	-20885256,24	1787391,094	16504835,19	-20887031,57	1786305,171	16502729,29	-20888806,72	1785219,48	16500623,05	
SAT. 3	-14363475,84	8604557,154	20750856,71	-14363896,7	8601978,41	20751658,22	-14364317,72	8599399,59	20752459,29	
SAT. 4	7433453,305	12993798,66	21929089,94	7431132,837	12995334,2	21928947,34	7428812,474	12996869,9	21928804,28	
	22 (s)			23 (s)			24 (s)			
SAT. 1	-11616262,37	14012492,62	18840517,58	-11616942,1	14010080,4	18841897,91	-11617621,99	14007668	18843277,81	
SAT. 2	-20890581,71	1784134,017	16498516,45	-20892356,53	1783048,786	16496409,51	-20894131,18	1781963,79	16494302,22	
SAT. 3	-14364738,88	8596820,699	20753259,93	-14365160,2	8594241,733	20754060,13	-14365581,66	8591662,69	20754859,89	
SAT. 4	7426492,216	12998405,69	21928660,75	7424172,063	12999941,62	21928516,76	7421852,016	13001477,7	21928372,3	
	25 (s)									
SAT. 1	-11618302,04	14005255,55	18844657,3							
SAT. 2	-20895905,66	1780879,017	16492194,59							
SAT. 3	-14366003,28	8589083,581	20755659,21							
SAT. 4	7419532,075	13003013,89	21928227,37							



## Prilog C2 : Ulazni podaci simulacije; Izmjerene pseudoudaljenosti

SV_Rho				
	SAT 1.	SAT 2.	SAT.3	SAT 4.
1 (s)	23568206,42	26183921,46	24652215,26	25606982,93
2 (s)	23568427,79	26184404,11	24652621,9	25606499,47
3 (s)	23568650,09	26184884,71	24653025,28	25606016,7
4 (s)	23568869,53	26185366,65	24653428,84	25605534,46
5 (s)	23569094,44	26185845,78	24653834,85	25605048,96
6 (s)	23569315,41	26186327,8	24654241,18	25604567,33
7 (s)	23569537,89	26186808,23	24654645,11	25604081,94
8 (s)	23569760,06	26187289,5	24655052,48	25603599,69
9 (s)	23569981,91	26187768,84	24655456,87	25603116,49
10 (s)	23570205,86	26188253,19	24655862,48	25602632,61
11 (s)	23570427,87	26188734,4	24656267,62	25602148,14
12 (s)	23570650,32	26189215,46	24656671,9	25601667,63
13 (s)	23570873,11	26189696,83	24657077,33	25601183,04
14 (s)	23571094,64	26190179,33	24657484,65	25600699,44
15 (s)	23571317,65	26190658,51	24657890,09	25600219,09
16 (s)	23571542,27	26191142,23	24658293,69	25599735,33
17 (s)	23571765,64	26191622,82	24658699,82	25599252,73
18 (s)	23571987,53	26192101,52	24659106,95	25598769,06
19 (s)	23572212,17	26192584,83	24659511,32	25598287,19
20 (s)	23572433,91	26193065,36	24659918,71	25597804,99
21 (s)	23572658,65	26193548,16	24660325,08	25597322,21
22 (s)	23572882,73	26194030,43	24660732,89	25596841,22
23 (s)	23573105,26	26194510,31	24661138,81	25596357,51
24 (s)	23573329,67	26194992,98	24661542,66	25595876,93
25 (s)	23573552,31	26195473,37	24661950,14	25595393,44

### Prilog C.3: GPS\_est\_EKF\_UKF

Prikaz koda za estimacije GPS pozicije pomoću EKF-a i UKF-a realiziranom u Matlabu.

Naziv datoteke: GPS\_est\_EKF\_UKF.m

```
% ESTIMACIJA POZICIJE POMOCU PROSIRENOG I NEDERIVIRAJUCEG KF-a
%
% U ovoj se datoteci nalazi simulacija estimacije GPS pozicije
% fiksnog GPS prijavnika za vremenski period od 25 sekundi.
% Ulazni podaci, odnosno podaci o ECEF pozicijama satelita i
% izmjerenim pseudoudaljenostima nalaze se u .mat datotekama
% SV_Pos.m i SV_Rho.m.
% Podaci su preuzeti s izvora [27].
% Estimacija pozicije bazira se na jednadzbi
% pseudoudaljenosti:
%
%           rho = || Xs - X || + b + v
% gdje Xs and X predstavljaju poziciju satelita i poziciju
% prijavnika, odnosno || Xs - X || predstavlja udaljenost među
% njima, a b predstavlja pomak sata prijavnika koji se rjesava
% paralelno s estimacijom pozicije.
% rho je mjerenje od strane prijavnika za svaki satelit, dok v
% predstavlja sum mjerenja (modeliran je kao bijelu sum).
% Postoje 4 nepoznanice: 3 koordinate prijavnika i pomak sata
% b.
% Zbog nelinearnosti jednadzbe pseudoudaljenosti i modela
% sustava (CV model) za estimaciju se koristi nelinearni KF.

clear all
close all
clc

% Ucitavanje ulaznih podataka iz SV_Pos.m i SV_Rho.m
load SV_Pos           %Pozicije satelita
load SV_Rho           %Pseudoudaljenosti satelita

% Definiranje vremenskog perioda
T = 1;                %Interval pozicioniranja
N = 25;               %Broj koraka (25 sek.)

% Postavljanje funkcije fstate na osnovu CV modela
% procesa, poziva se funkcija iz CV_Model.m
fstate = @(X) CV_Model(X, T);

% Postavljanje matrice kovarijanci suma Q
Sf = 36;Sg = 0.01;sigma=5;      %Varijanca prijelaznog stanja
Qb = [Sf*T+Sg*T*T*T/3 Sg*T*T/2;
Sg*T*T/2 Sg*T];
Qxyz = sigma^2 * [T^3/3 T^2/2;
                  T^2/2 T];
Q = blkdiag(Qxyz,Qxyz,Qxyz,Qb);
```

```

% Postavljanje inicijalne vrijednosti varijable stanja x
% i kovarijance stanja P

%Inicijalna pozicija
x = zeros(8,1);
x([1 3 5]) = [-2.168816181271560e+006
              4.386648549091666e+006
              4.077161596428751e+006];

%Inicijalna brzina
x([2 4 6]) = [0 0 0];

%Inicijalna greška zbog pomaka sata
x(7,1) = 3.575261153706439e+006;
x(8,1) = 4.549246345845814e+001;
P = eye(8)*10;

fprintf('Estimacija GPS pozicije koristeći EKF\n')
tic

% ESTIMACIJA POZICIJE POMOCU EKF-a
for ii = 1:N
    % Postavljanje funkcije pseudoudaljenosti, odnosno
    % postavlja se pseudoudaljenost za svaki satelit -
    % poziva se funkcija iz F_Pseudoudaljenost.m
    hmeas = @(X) F_Pseudoudaljenost(X, SV_Pos{ii});

    % Postavljanje matrice R
    Rhoerror = 36; %Varijanca greške mjerenja
    R = eye(size(SV_Pos{ii}, 1)) * Rhoerror;

    % Postavljanje izmjerenih vrijednosti, podaci iz
    % SV_Rho.mat
    z = SV_Rho{ii}.';

    % Pozivanje funkcije EKF-a za estimaciju pozicije
    [x,P] = EKF(fstate,hmeas,Q,R,z,x,P)

    % Upis estimiranih pozicija u matricu POS_EKF
    Pos_EKF(:,ii) = x([1 3 5]).';

    fprintf('(EKF) Vrijeme: %d od %d ',ii,N)
    time = toc;
    remaintime = time * N / ii - time;
    fprintf('Proteklo vrijeme: %f sekundi, Preostalo
            vrijeme: %f sekundi\n',time,remaintime)
end

% Postavljanje inicijalne vrijednosti varijable stanja x
% i kovarijance stanja P

%Inicijalna pozicija
x = zeros(8,1);
x([1 3 5]) = [-2.168816181271560e+006
              4.386648549091666e+006

```

```

4.077161596428751e+006];

%Inicijalna brzina
x([2 4 6]) = [0 0 0];

%Inicijalna greška zbog pomaka sata
x(7,1) = 3.575261153706439e+006;
x(8,1) = 4.549246345845814e+001;
P = eye(8)*10;

% ESTIMACIJA POZICIJE POMOCU UKF-a
for ii = 1:N
    % Postavljanje funkcije pseudoudaljenosti, odnosno
    % postavlja se pseudoudaljenost za svaki satelit -
    % poziva se funkcija iz F_Pseudoudaljenost.m
    hmeas = @(X) F_Pseudoudaljenost(X, SV_Pos{ii});

    % Postavljanje matrice R
    Rhoerror = 36; %Varijanca greške mjerenja
    R = eye(size(SV_Pos{ii}, 1)) * Rhoerror;

    % Postavljanje izmjerenih vrijednosti, podaci iz
    % SV_Rho.mat
    z = SV_Rho{ii}.';

    % Pozivanje funkcije UKF-a za estimaciju pozicije
    [x,P]=UKF(fstate,x,P,hmeas,z,Q,R)

    % Upis estimiranih pozicija u matricu POS_UKF
    Pos_UKF(:,ii) = x([1 3 5]).';

    fprintf('(UKF) Vrijeme: %d od %d ',ii,N)
    time = toc;
    remaintime = time * N / ii - time;
    fprintf('Proteklo vrijeme: %f sekundi, Preostalo
            vrijeme: %f sekundi\n',time,remaintime)
end

% Preracunavanje pozicije iz ECEF koordinatnog sustava u
% geografski koordinatni sustav (LLA) za estimirane koordinate
% (EKF)
for ii = 1:N
    ECEFx = Pos_EKF(1,ii);
    ECEfy = Pos_EKF(2,ii);
    ECEFz = Pos_EKF(3,ii);
    ecoord = ECEF_LLA(ECEFx,ECEfy,ECEFz)
    Pos_LLA_EKF(:,ii) = ecoord ([1 2 3]);
end

% Preracunavanje pozicije iz ECEF koordinatnog sustava u
% geografski koordinatni sustav (LLA) za estimirane koordinate (UKF)
for ii = 1:N

    ECEFx = Pos_UKF(1,ii);

```

```

ECEFy = Pos_UKF(2,ii);
ECEFz = Pos_UKF(3,ii);
ecoord = ECEF_LLA(ECEFx,ECEFy,ECEFz)
Pos_LLA_UKF(:,ii) = ecoord ([1 2 3]);
end

% Graficki prikaz estimiranih pozicija(ECEF) u vremenu
figure;
subplot(3,1,1)
plot(1:N, Pos_EKF(1,:), '-r', 'Linewidth',1.5)
hold on;grid on;
plot(1:N, Pos_UKF(1,:), '-b', 'Linewidth',1.5)
hold on;grid on;

legend('EKF', 'UKF')
xlabel('Vrijeme(s)')
ylabel('Xe')

subplot(3,1,2)
plot(1:N, Pos_EKF(2,:), '-r', 'Linewidth',1.5)
hold on;grid on;
plot(1:N, Pos_UKF(2,:), '-b', 'Linewidth',1.5)
hold on;grid on;

legend('EKF', 'UKF')
xlabel('Vrijeme(s)')
ylabel('Ye')

subplot(3,1,3)
plot(1:N, Pos_EKF(3,:), '-r', 'Linewidth',1.5)
hold on;grid on;
plot(1:N, Pos_UKF(3,:), '-b', 'Linewidth',1.5)
hold on;grid on;

legend('EKF', 'UKF')
xlabel('Vrijeme(s)')
ylabel('Ze')

ha = axes('Position',[0 0 1 1], 'Xlim',[0 1], 'Ylim',[0
1], 'Box','off', 'Visible','off', 'Units','normalized', 'clipping',
'off');
text(0.5, 1, '\bf Estimirane X,Y,Z koordinate pozicije
(ECEF)', 'HorizontalAlignment','center', 'VerticalAlignment', 'top');

% Graficki prikaz estimiranih pozicija (LLA) u vremenu
figure;
subplot(3,1,1)
plot(1:N, Pos_LLA_EKF(1,:), '-r', 'Linewidth',1.5)
hold on;grid on;
plot(1:N, Pos_LLA_UKF(1,:), '-b', 'Linewidth',1.5)
hold on;grid on;

legend('EKF', 'UKF')
xlabel('Vrijeme(s)')

```

```

ylabel('Z.duzina(deg)')

subplot(3,1,2)
plot(1:N, Pos_LLA_EKF(2,:), '-r', 'Linewidth', 1.5)
hold on; grid on;
plot(1:N, Pos_LLA_UKF(2,:), '-b', 'Linewidth', 1.5)
hold on; grid on;

legend('EKF', 'UKF')
xlabel('Vrijeme(s)')
ylabel('Z.sirina(deg)')

subplot(3,1,3)
plot(1:N, Pos_LLA_EKF(3,:), '-r', 'Linewidth', 1.5)
hold on; grid on;
plot(1:N, Pos_LLA_UKF(3,:), '-b', 'Linewidth', 1.5)
hold on; grid on;

legend('EKF', 'UKF')
xlabel('Vrijeme(s)')
ylabel('Visina')

ha = axes('Position', [0 0 1 1], 'Xlim', [0 1], 'Ylim', [0
1], 'Box', 'off', 'Visible', 'off', 'Units', 'normalized', 'clipping' ,
'off');
text(0.5, 1, '\bf Estimirane koordinate pozicije u geografskom
koordinatnom
sustavu', 'HorizontalAlignment', 'center', 'VerticalAlignment', 'top');

% Graficki prikaz relativne greske pri estimaciji pozicije
figure;
for ii = 1:3
    subplot(3,1,ii)
    plot(1:N, Pos_EKF(ii,:) - mean(Pos_EKF(ii,:)), '-
g', 'Linewidth', 1.5)
    hold on; grid on;
    plot(1:N, Pos_UKF(ii,:) - mean(Pos_UKF(ii,:)), '-
m', 'Linewidth', 1.5)
    hold on; grid on;
    legend('EKF', 'UKF')
    xlabel('Vrijeme(s)')
    ylabel('Greška (metara)')
end
ha = axes('Position', [0 0 1 1], 'Xlim', [0 1], 'Ylim', [0
1], 'Box', 'off', 'Visible', 'off', 'Units', 'normalized', 'clipping' ,
'off');
text(0.5, 1, '\bf Relativna pozicijska greška u X,Y i Z
koordinatama', 'HorizontalAlignment', 'center', 'VerticalAlignment',
'top')

```

## Prilog C.4: CV\_Model.m

Prikaz koda modela konstantne brzine (procesni model) koji se koristi u estimaciji GPS pozicije pomoću EKF-a i UKF-a realiziranom u Matlabu.

Naziv datoteke: CV\_Model.m

```
% CV MODEL - PROCESNI MODEL

% Model konstantne brzine za GPS pozicioniranje [27]
function [Val, Jacob] = CV_Model(X, T)

    Val = zeros(size(X));
    Val(1:2:end) = X(1:2:end) + T * X(2:2:end);
    Val(2:2:end) = X(2:2:end);
    Jacob = [1, T; 0, 1];
    Jacob = blkdiag(Jacob, Jacob, Jacob, Jacob);
end
```

## Prilog C.5: F\_Pseudoudaljenost.m

Prikaz koda modela mjerenja pseudoudaljenosti (model mjerenja) koji se koristi u estimaciji GPS pozicije pomoću EKF-a i UKF-a realiziranom u Matlabu.

Naziv datoteke: F\_Pseudoudaljenost.m

```
% MODEL MJERENJA - PSEUDOUDALJENOST

% Izracunavanje vrijednosti pseudoudaljenosti
% Val = || Xs - X || + b i njegove Jakobijan matrice.
function [Val, Jacob] = F_Pseudoudaljenost(X, SV)

% Svaki SV red su koordinate satelita
dX = bsxfun(@minus, X([1,3,5])', SV); % X - Xs
Val = sum(dX.^2, 2).^0.5 + X(7);
Jacob = zeros(size(SV, 1), size(X, 1));
Jacob(:, [1,3,5]) = bsxfun(@rdivide, dX, Val);
Jacob(:, 7) = 1;
end
```

## Prilog C.6: EKF.m

Prikaz koda EKF-a koji se koristi u estimaciji GPS pozicije pomoću EKF-a, realiziranom u Matlabu.

Naziv datoteke: EKF.m

```
% PROSIRENI NELINEARNI KALMANOV FILTAR (EKF) [27]
%
% U ovoj skripti nalazi se algoritam EKF-a. Realiziran je
% pomocu funkcije:
%
% [xo, Po] = EKF(fstate, hmeas, Q, R, z, xi, Pi)
%
% Jednadzba stanja:
%   X(n+1) = f(X(n)) + w(n)
% Jednadzba mjerenja:
%   Z(n) = g(X(n)) + v(n)
%
%   w ~ N(0, Q) je Gaussov sum s kovarijancom Q
%   v ~ N(0, R) je Gaussov sum s kovarijancom R
%
% Ulazi:   fstate: funkcija prijelaznih stanja (model
%           procesa), koja uzima varijablu Xn i vraca
%           f(Xn) i Jakobijan matricu
%   xi: "a priori" estimat stanja
%   Pi: "a priori" estimat kovarijance stanja
%   hmeas: funkcija mjerenja pseudoudaljenosti h(x),
%           koja uzima varijablu Xn i vraca hmeas(Xn) i
%           Jakobijan matricu
%   z: trenutno mjerenje
%   Q: kovarijanca procesnog suma
%   R: kovarijanca suma mjerenja
% Izlaz:  xo: "a posteriori" estimat stanja (pozicije)
%         Po: "a posteriori" estimat kovarijance stanja
%
% ALGORITAM ZA EKF:
% Potrebno je linearizirati ulazne funkcije fstate i hmeas
% kako bi se dobile matrice prijelaznih stanja A i mjerenja H
% (dinamika sustava).
%
function [xo, Po] = EKF(fstate, hmeas, Q, R, z, xi, Pi)
    N_state = size(xi, 1);
%
% 1. Projekcija; postavljanje referentne tocke
%   linearizacije
%   Xp = fstate(xi)
%   [xp, ~] = fstate(xi);
%
% 2. Linearizacija jednadzbe stanja, A ja Jakobijan
%   procesnog modela
%
%           d f      |
%   A = -----|
%           d X      |X=Xp
```



```

[~, A] = fstate(xp)

% 3. Linearizacija jednadzbe mjerenja, H je Jakobijan
%   modela mjerenja pseudoudaljenosti
%       d g      |
% H = -----|
%       d X      |X=Xp
[hmeasxp, H] = hmeas(xp);

% 4. Kovarijanca od Xp
Pp = A * Pi * A.' + Q;

% 5. Kalmanovo pojaćanje
K = Pp * H' / (H * Pp * H.' + R);

% 6. Izlazno stanje (estimat)
xo = xp + K * (z - hmeasxp);
I = eye(N_state, N_state);

% 7. Kovarijanca izlaznog stanja(estimata)
Po = (I - K * H) * Pp;

```

## Prilog C.7: UKF.m

Prikaz koda UKF-a koji se koristi u estimaciji GPS pozicije pomoću UKF-a, realiziranom u Matlabu.

Naziv datoteke: UKF.m

```

% NEDERIVIRAJUCI NELINEARNI KALMANOV FILTAR (UKF) [30]
%
% U ovoj skripti nalazi se algoritam UKF-a. Realiziran je
% pomocu funkcije:
%
% [x, P] = ukf(fstate,x,P,hmeas,z,Q,R)
% koja vraca estimat stanja x i kovarijancu stanja P.
%
% Ulazi:   fstate: funkcija fstate odnosno funkcija modela
%          procesa fstate(x)
%          x: "a priori" estimat stanja
%          P: "a priori" estimat kovarijance stanja
%          hmeas: funkcija modela mjerenja pseudoudaljenosti
%          hmeas(x)
%          z: trenutno mjerenje
%          Q: kovarijanca procesnog suma
%          R: kovarijanca suma mjerenja
% Izlaz:  x: "a posteriori" estimat stanja (pozicije)
%          P: "a posteriori" estimat kovarijance stanja

function [x,P]=UKF(fstate,x,P,hmeas,z,Q,R)

L=numel(x);           %Broj stanja
m=numel(z);           %Broj mjerenja

```

```

alpha=1e-3; %Moze se optimizarati
ki=0; %Moze se optimizirati
beta=2; %Moze se optimizirati
lambda=alpha^2*(L+ki)-L; %Faktor skaliranja
c=L+lambda; %Faktor skaliranja

% Izracunavanje tezina osrednjavanja ocekivanja
Wm=[lambda/c 0.5/c+zeros(1,2*L)];
Wc=Wm;

% Izracunavanje tezina osrednjavanja kovarijance
Wc(1)=Wc(1)+(1-alpha^2+beta);
c=sqrt(c);

%Pozivanje funkcije za izracun sigma tocaka oko x
X=sigmas(x,P,c);

%Izvodjenje nederivirajuće transformacije procesa
[x1,X1,P1,X2]=ut(fstate,X,Wm,Wc,L,Q);

%Izvodjenje nederivirajuće transformacije mjerenja
[z1,Z1,P2,Z2]=ut(hmeas,X1,Wm,Wc,m,R);

P12=X2*diag(Wc)*Z2'; %Transformirana kovarijanca
K=P12*inv(P2);
x=x1+K*(z-z1); %Osvjezavanje stanja
P=P1-K*P12'; %Osvjezavanje kovarijance stanja

%Funkcija nederivirajuće transformacije
%Ulaz:
% f: nelinearna mapa
% X: sigma tocke
% Wm: tezine za ocekivanje
% Wc: tezine za kovarijancu
% n: broj izlaza od f
% R: pridodana kovarijanca
%Izlaz:
% y: transformirano ocekivanje
% Y: transformirane tocke uzorkovanja
% P: transformirane kovarijance
% Y1: transformirane devijacije

function [y,Y,P,Y1]=ut(f,X,Wm,Wc,n,R)

L=size(X,2);
y=zeros(n,1);
Y=zeros(n,L);
for k=1:L
    Y(:,k)=f(X(:,k));
    y=y+Wm(k)*Y(:,k);
end
Y1=Y-y(:,ones(1,L));

```

```

P=Y1*diag(Wc)*Y1'+R;

%Sigma tocke oko referentne tocke
%Ulazi:
%      x: referentna tocka
%      P: kovarijanca
%      c: koeficijent
%Izlaz:
%      X: sigma tocke u okolini x

function X=sigmas(x,P,c)

A = c*chol(P)';
Y = x(:,ones(1,numel(x)));
X = [x Y+A Y-A];

```

## Prilog C.8: ECEF\_LLA.m

Prikaz koda koji estimirane koordinate u ECEF koordinatnom sustavu pretvara u geografski koordinatni sustav.

Naziv datoteke: ECEF\_LLA.m

```

% PRERACUNAVANJE KOORDINATA IZ ECEF SUSTAVA U LLA
%
% U ovoj se skripti dobivene estimirane koordinate u ECEF
% koordinatnom
% sustavu preracunavaju u geografski koordinatni sustav prema
% [7]

% Ulazi:
%      ECEFx - X koordinata u ECEF-u
%      ECEfy - Y koordinata u ECEF-u
%      ECEFz - Z koordinata u ECEF-u
% Izlaz:
%      ecoord - vektor redak koji sadrzi preracunate
%              koordinate

function ecoord = ECEF_LLA(ECEFx,ECEfy,ECEFz)

% Definiranje fizikalnih konstanti koje su potrebne u
% izracunu:

% Najduza os elipsoida WGS 84
AA = 6378137.00000; % m
% Najkraca os elipsoida WGS 84
BB = 6356752.31425; % m
% Kvadrat zemljinog orbitalnog ekscentriteta
esquare=(AA^2 - BB^2) / AA^2;
% Konstanta za pretvaranje rad u sek.
degrad = pi/180.0; % kutni faktor konverzije

```

```

% Izracun LLA koordinata

% Izracunavanje Z.duzine u radijanima
long = atan(ECEfy / ECEfx);
% Izracunavanje Z.sirine u radijanima
p = sqrt(ECEfx^2 + ECEfy^2);
% Aproksimacija visine
lat0 = atan((ECEfz / p) / (1 - esquare));
stop = 0;

while (stop == 0)
    N0 = AA^2 / (sqrt(AA^2 * (cos(lat0))^2 + ...
        BB^2 * (sin(lat0))^2));
    altitude = (p / cos(lat0)) - N0;    % visina (m)
    % Izracunavanje točne visine
    term = (1 - esquare * (N0 / (N0 + altitude)))^(-1);
    lat = atan(ECEfz / p * term);      % visina (rad)

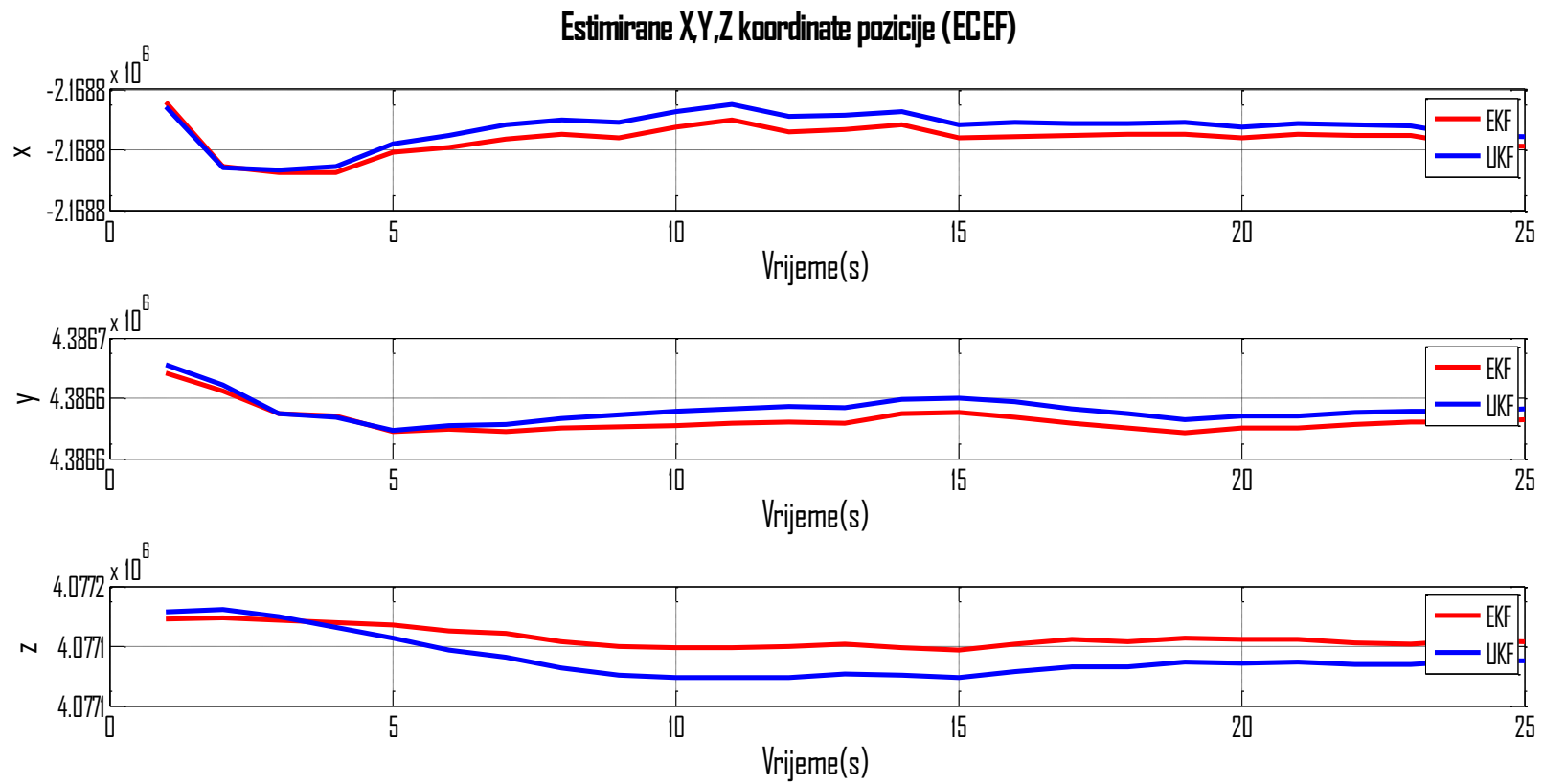
    % Provjera točnosti rezultata
    if (abs(lat - lat0) < 1.0e-12)
        stop = 1;
    end
    lat0 = lat;
end

% Konverzija Z.duzine i Z.sirine u stupnjeve
latitude = lat / degrad;
longitude = long / degrad;
% Koordinate pozicije u LLA koordinatnom sustavu
ecoord = [ latitude longitude altitude ];

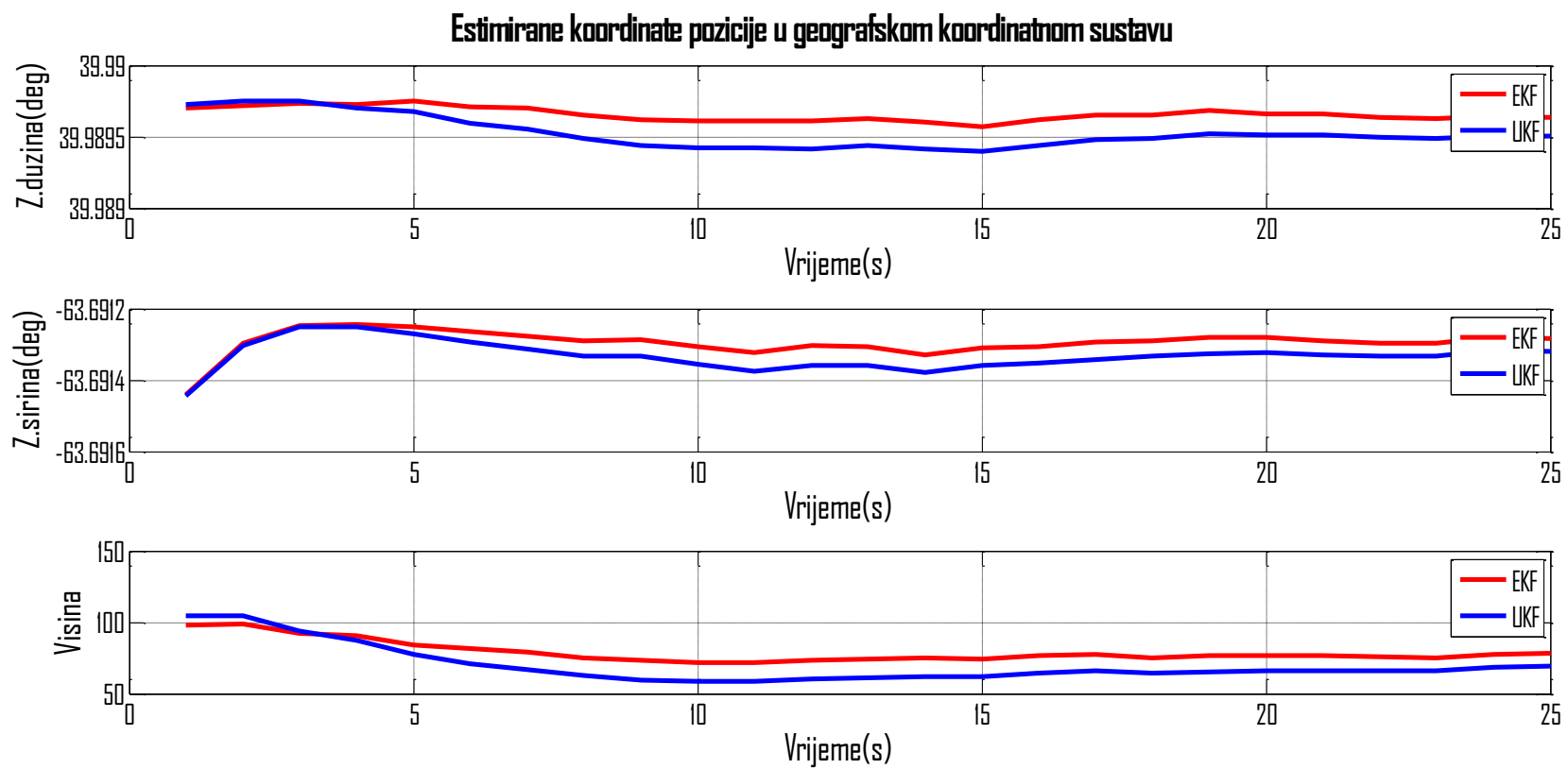
return;

```

### Prilog D.1: Prikaz estimiranih vrijednosti koordinata pozicije (ECEF)



## Prilog D.2: Prikaz estimiranih koordinata (LLA)



### Prilog D.3: Prikaz relativne pozicijske greške u x, y, z ECEF koordinatama

