

SVEUČILIŠTE U RIJECI
POMORSKI FAKULTET U RIJECI

SARA VOLARIĆ

**ANALIZA POKAZATELJA FUNKCIONIRANJA SUSTAVA
USLUŽIVANJA TERETA NA LUČKOJ OPERATIVNOJ
OBALI**

DIPLOMSKI RAD

Rijeka, 2014.

SVEUČILIŠTE U RIJECI
POMORSKI FAKULTET U RIJECI

**ANALIZA POKAZATELJA FUNKCIONIRANJA SUSTAVA
USLUŽIVANJA TERETA NA LUČKOJ OPERATIVNOJ
OBALI**

**AN ANALYSIS OF THE OPERATION INDICES OF CARGO
SERVING AT THE PORT QUAY**

DIPLOMSKI RAD

Kolegij: Teorija redova čekanja
Mentor: dr.sc. Svjetlana Hess
Student: Sara Volarić
Studijski smjer: Logistika i menadžment u pomorstvu i prometu
JMBAG: 0112039159

Rijeka, rujan, 2014.

Studentica: Sara Volarić

Smjer: Logistika i menadžment u pomorstvu i prometu

JMBAG: 0112039519

IZJAVA

Kojom izjavljujem da sam diplomski rad s naslovom ANALIZA POKAZATELJA FUNKCIONIRANJA SUSTAVA USLUŽIVANJA TERETA NA LUČKOJ OPERATIVNOJ OBALI izradila samostalno pod mentorstvom dr.sc. Svjetlane Hess.

U radu sam primijenila metodologiju znanstvenoistraživačkog rada i koristila literaturu koja je navedena na kraju diplomskog rada. Tuđe spoznaje, stavove, zaključke, teorije i zakonitosti koje sam izravno ili parafrazirajući navodila u diplomskom radu na uobičajen, standardan način citirala sam i povezala s fusnotama s korištenim bibliografskim jedinicama. Rad je pisan u duhu hrvatskog jezika.

Studentica

Sara Volarić

Sažetak

Podsustav lučke operativne obale dio je složenog, dinamičkog lučkog sustava na moru, koji svoju temeljnu funkciju nalazi u racionalnom i efikasnom iskrcaju, ukrcaju i transportu tereta. Kod analize pristana kao podsustava lučke operativne obale, uočava se povezanost s cijelokupnim lučkim okruženjem, koje mora biti sinkronizirano kako bi bile zadovoljene potražnje brodova ali i pristana.

Prvi puta u povijesti problem koji nastaje čekanjem spominje danski matematičar, statističar i inženjer Anger Krarup Erlang. Vrše se izračuni i analize podsustava luke kako bi se pridonjelo većoj kvaliteti i efikasnosti lučkog sustava. Matematičkim modelima opisuju se lučki pristani kako bi se pokušalo utvrditi ponašanje pojedinog pristana pod utjecajem različitih okolnosti.

Cilj je pronaći optimalan broj pristana na operativnoj obali, u slučaju prevelikog broja pristana dolazi do neiskorištenosti i povećanja troškova sustava, a u obrnutom slučaju kod malog broja pristana dolazi do troškova brodova.

Ključne riječi: lučki sustav, operativna obala, pristani

Summary

Subsystem of operational port coast is part of a complex, dynamic port system at sea, with its primary function found in the rational discharging, loading and transporting. The analysis of the pier as a subsystem of operational port coast reveals connections with entire port environment, which must be synchronized so they can meet the demand of ships as well as the pier.

For the first time in history, a problem that occurs with waiting is mentioned by Danish mathematician, statistician and engineer Anger Krarup Erlang. Calculations and analysis are performed to improve the quality and efficiency of the port system. Mathematical models describe the port docks to try to determine the behaviour of each pier influenced by various factors.

The goal is to find the optimum number of berths on quay, in case of too many piers there is under utilization and increase of the cost of the system, and in the opposite case with a small number of piers there is a increase in shipping costs.

Key words: port system, operational coast, docks

SADRŽAJ

	stranica
Sažetak.....	I
Summary.....	I
1. UVOD	1
1.1. Problem, predmet i objekt istraživanja	1
1.2. Radna hipoteza.....	1
1.3. Svrha i cilj istraživanja.....	2
1.4. Znanstvene metode	2
1.5. Struktura rada.....	2
2. POJAM I VRSTE REDOVA ČEKANJA.....	4
2.1. Pojam reda čekanja	4
2.2. Vrste redova čekanja.....	10
3. PARAMETRI SUSTAVA MASOVNOG USLUŽIVANJA.....	13
3.1. Tokovi dolaska jedinica i duljine vremena njihovog opsluživanja.....	13
3.2. Razdioba toka dolazaka i duljine remena opsluživanja jedinica	14
3.3. Određivanje parametara sustava opsluživanja	18
4. POKAZATELJI FUNKCIONIRANJA SUSTAVA MASOVNOG OPSLUŽIVANJA.....	20
4.1. Jednokanalni sustav s čekanjem i neograničenom duljinom reda čekanja (M/M/1/∞).....	21
4.2. Jednokanalni sustav s čekanjem i ograničenom duljinom reda čekanja (M/M/1/m)	22
4.3. Višekanalni sustav s čekanjem i neodređenom duljinom reda čekanja (M/M/S/∞)	23
4.4. višekanalni sustav s čekanjem i neograničenom duljinom reda čekanja (M/M/S/∞)	24
4.5. ANALIZA MEĐUZAVISNOSTI POKAZATELJA U SUSTAVU OPSLUŽIVANJA.....	25
4.6. TROŠKOVI ČEKANJA	29
5. LUKA KAO SUSTAV MASOVNOG OPSLUŽIVANJA – ANALIZA SLUČAJA..	32
5.1. Parametri luke kao sustava masovnog opsluživanja	35
5.2. Izračun pokazatelja operativne obale.....	37

5.2.1.	Izračun parametara funkcioniranja sustava sa četiri uslužna kanala	40
5.2.2.	Izračun parametara funkcioniranja sustava sa šest uslužna kanala	43
5.2.3.	Izračun parametara funkcioniranja sustava sa osam uslužnih kanala.....	46
5.3.	Analiza pokazatelja učinaka operativne obale	48
6.	ZAKLJUČAK	51
	POPIS LITERATURE.....	52
	POPIS SHEMA	54
	POPIS TABELA.....	54
	POPIS GRAFIKONA.....	54

1. UVOD

Problem čekanja u redu da bi jedinice, predmet ili ljudi bili opsluženi seže daleko u prošlost. Stoga se razvila disciplina čiji je predmet izučavanja sistem masovnog opsluživanja. Ta disciplina naziva se teorija redova čekanja ili masovnog opsluživanja, ona izučava kvantitativne aspekte kao što su vrijeme koje jedinice provedu u redu čekanja, dužina reda čekanja ali i kapacitet kanala opsluživanja. Pokušava ponuditi optimalna rješenja kako bi jedinice bile zadovoljne ali i sustav efikasan. U moderno vrijeme razvijaju se i razni kompjuterski programi koji pomažu u rješavanju tog problema.

1.1. PROBLEM, PREDMET I OBJEKT ISTRAŽIVANJA

Problem istraživanja kojim se bavi ovaj diplomski rad jest analiza pokazatelja funkcioniranja sustava usluživanja tereta na lučkoj operativnoj obali, te kako postići efikasnost operativne obale uz najmanje troškove.

Na osnovi definiranog problema istraživanja proizlazi **predmet istraživanja**. Temeljem istraženih osnovnih pojmova, s kojim se susrećemo na operativnoj obali kao sustava masovnog opsluživanja, pokušati odrediti optimalan broj pristana za iskrcaj tereta.

Na kraju **objekt istraživanja** na koji se nadovezuje problem i predmet istraživanja a to su: parametri i pokazatelji luke kao sustav masovnog opsluživanja, operativna obala, pristani.

1.2. RADNA HIPOTEZA

Na temelju problema, predmeta i objekta istraživanja postavljena je **radna hipoteza**. Rezultate istraživanja do kojih dolazimo izračunavanjem pokazatelja lučkog sustava masovnog opsluživanja nastoji se postići optimalno funkcioniranje sustava opsluživanja tereta na lučkoj operativnoj obali.

1.3. SVRHA I CILJ ISTRAŽIVANJA

Svrha i cilj ovog diplomskog rada je određivanje parametara koji osiguravaju određen broj potrebnih pristana kako bi se zadovoljile potrebe brodova za iskrcaj bez uskih grla i predimenzioniranja sustava.

Da bi uspješno ostvario prethodno navedeni predmet istraživanja, dokazala navedena hipoteza te postigli cilj i svha, potrebno je dati odgovore na sljedeća pitanja:

1. Koja je problematika reda čekanja u lučkom sustavu masovnog opsluživanja
2. Koji su parametri luke kao sustava masovnog opsluživanja
3. Koji su pokazatelji funkcioniranja lučog sustava masovnog opsluživanja
4. Može li se temeljem teorijskih saznanja odrediti potreban broj pristana za iskrcaj tereta na operativnoj obali

1.4. ZNANSTVENE METODE

Analiziranje problematike te svrha i cilj istraživanja za posljedicu imaju uporabu sljedećih **znanstvenih metoda**: dedukcije, analize i sinteze, statistike, matematičke metode te metoda komparacije

1.5. STRUKTURA RADA

Diplomski rad sastoji se od šest međusobno povezanih cijelina.

U **Uvodu** su navedeni problem, predmet i objekt istraživanja temeljem čega sljedi radna hipoteza, svrha i cilj rad, znanstvene metode te obrazloženje strukture rada.

U drugom dijelu čiji je naslov **Pojam i vrste redova čekanja** definiran je pojam reda čekanja, osnovni pojmovi lučkog sustava masovnog opsluživanja te vrste redova čekanja.

Treći dio rada pod nazivom **Parametri sustava masovnog opsluživanja** objašnjava osnovne i ostale parametre lučkog sustava masovnog opsluživanja kako bi se moglo ostvariti istraživanje te kako pojedini parametri utječu na lučki sustav.

Četvrti dio rada naziva se **Pokazatelji funkcioniranja sustava masovnog opsluživanja** objašnjava izračunavanje odgovarajućih pokazatelja kojima se izražava funkcioniranje lučkog sustava masovnog opsluživanja, te kako gubitke nastale čekanjem broda ili pristana svesti na minimum.

Luka kao sustav masovnog opsluživanja-analiza slučaja naziv je petog dijela u kojem se na realnom primjeru izračunavaju parametri.

Zadnji šesti dio je **Zaključak** u kojem je dana sinteza rezultata istraživanja te je dokazana postavljena radna hipoteza.

2. POJAM I VRSTE REDOVA ČEKANJA

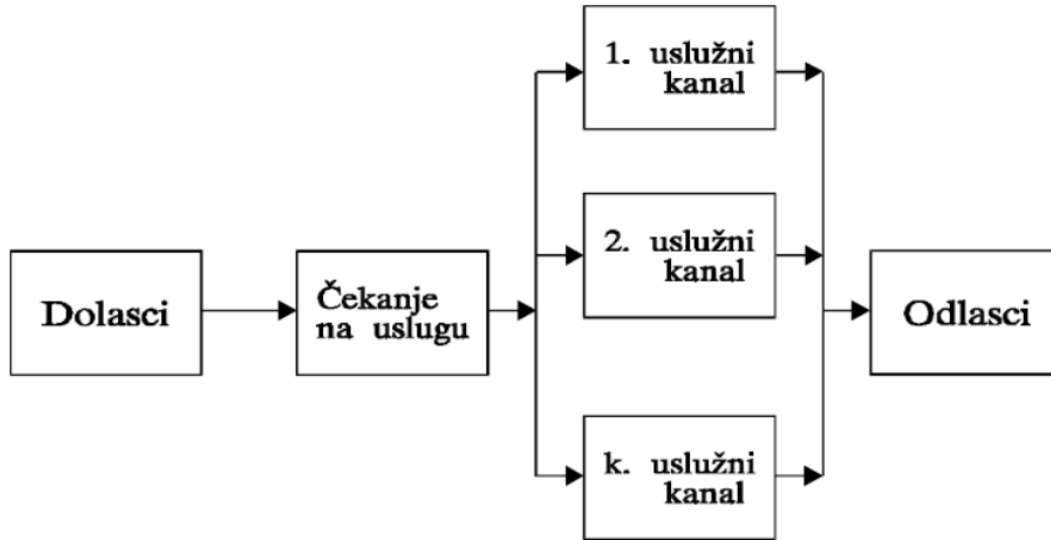
Kako bi se provela analiza problema koji nastaje redom čekanja potrebno je definirati osnovne pojmove. U prvom poglavlju diplomskog rada definiran je pojam reda čekanja, problemi koji se javljaju, elementi kojima se opisuje sustav opsluživanja te način na koji jedinice čekaju u redu da budu opslužene.

2.1. POJAM REDA ČEKANJA

Postoji više definicija reda čekanja. Red čekanja ili sustav masovnog usluživanja definira se kao problem koji nastaje kada se određeni broj jedinica (ljudi ili predmeta) koji traže odgovarajuću uslugu ili obradu moraju čekati, tj. provesti izvjesno vrijeme u redu čekanja prije nego su opsluženi ili kada radno mjesto koje pruža tražene usluge mora čekati jedinice koje treba opslužiti.¹ Proces opsluživanja jedinica sastoji se od više koraka najčešće su to četiri koraka, dolazak jedinica u sustav zbog potrebe za određenom uslugom ili obradom, čekanja jedinica u redu ako su sva uslužna mjesta zauzeta, opsluživanja jedinica na jednom ili više uslužnih mjesta ovisno što traže i na koncu odlaska jedinica iz sustava kada je usluga ili obrada izvršena. Proces opsluživanja jedinica prikazan je na shemi 1.

¹Zenzerović, Z: Teorija redova čekanja, stohastički procesi 2. dio, Pomorski fakultet u rijeci, Rijeka, 2003, str.1

Shema 1. Proces opsluživanja jedinica s tri uslužna mjesta (kanala)



Izvor: Petrić, J: Operacijska istraživanja, Suvremena administracija, Beograd, 1976, str.379

Red čekanja nastaje kao posljedica neusklađenosti kapaciteta uslužnih mjesta sa zahtjevima korisnika usluge. Kapacitet uslužnog mjesta izražava se brojem jedinica (ljudi ili predmeta) koje se mogu opslužiti u jedinici vremena. Ukoliko se javi situacija da je prosječan broj jedinica koji traži određenu uslugu veći od kapaciteta tog uslužnog mjesta, samim tim postojeći kapaciteti ne mogu zadovoljiti zahtjeve jedinice su prisiljene čekati u redu kako bi usluga bila izvršena. Ako se javi obrnuta situacija da je prosječan broj jedinica manji od kapaciteta uslužnih mjesta, jedinice neće morati čekati u redu bit će odmah uslužene, ali zbog predimenzioniranih kapaciteta, pojavit će se „čekanje“ uslužnih mjesta koja neće biti u potpunosti iskorištena.

Teorija redova čekanja ili masovnog opsluživanja jedna je od metoda operacijskih istraživanja kojom se proučava procese opsluživanja slučajno pristiglih jedinica ili zahtjevi za nekom uslugom koristeći se pritom matematičkim modelima pomoću kojih se nastoji ustanoviti međuzavisnost između dolaska jedinica, njihovog čekanja na uslugu, opsluživanja te na koncu izlaska jedinica iz sustava s ciljem da se postigne optimalno funkcioniranje promatranog

sustava.² U hrvatskoj literaturi ne postoji jedinstven naziv za tu metodu operacijskih istraživanja. U rječniku iz operacijskih istraživanja za hrvatsko govorno područje spominju se nazivi: masovno opsluživanje, red čekanja i sustav masovnog opsluživanja. Neki autori poput V. Čerić u knjizi „Simulacijsko modeliranje“ koristi termine: repovi čekanja i sistemi masovnog posluživanja, Ž. Pauše koristi: proces usluživanja i teorija repova, D. Barković u knjizi iz operacijskih istraživanja koristi termine: repovi čekanja i problemi reda čekanja, dok S. Soko sustavom usluživanja naziva svaki sustav koji služi zadovoljavanju bilo kakvih zahtjeva.

Problem reda čekanja je proces opsluživanja koji može biti predmet teorije općih sustava, pa otuda i naziv sustav masovnog opsluživanja.³ Naime, sustav je određen elementima koji svojim ulascima i izlascima čine funkcioniranje sustava. Za bilo koji sustav opsluživanja ulasci su jedinice koje traže neku uslugu odnosno imaju zahtjev za opsluživanjem, a izlasci predstavljaju obavljenom uslugom. Stanje sustava određeno je brojem jedinica u njemu, a dolaskom jedinica koje imaju zahtjev ili obavljenom uslugom prelazi se iz jednog stanja sustava u drugi. Uslužna mjesta zajedno s jedinicama koje se opslužuju čine tzv. opslužujući sustav, a zajedno s mogućim jedinicama u redu dolazaka sustav masovnog opsluživanja.

Osnovni cilj pri istraživanju sustava opsluživanja je njegovo poboljšanje tako da se pronađu svi zahtjevi koji će funkcioniranje sustava učiniti boljim, efikasnijim i ekonomičnijim tj. optimalnim s obzirom na neki kriterij. Upravo zbog toga jedan od prvih zadataka je određivanje parametara ili kvantitativnih pokazatelja rada promatranog procesa opsluživanja i za potrebnu razinu kvalitete opsluživanja odrediti minimalni broj uslužnih mjesta s kojim se može ostvariti tražena kvaliteta opsluživanja. Rješavanje problema reda čekanja znači odrediti optimalan broj uslužnih mjesta za koji će vrijeme čekanja u redu ili troškovi (gubici) prouzrokovani čekanjem biti minimalni tj. rješavanjem problema reda čekanja neće se moći u potpunosti eliminirati čekanje već samo gubici nastali čekanjem svesti na minimum. Optimalno rješenje reda čekanja ne znači da više čekanja neće biti jer da bi se eliminiralo čekanje od strane jedinica kapaciteta uslužnih mjesta bi trebalo biti više nego broja korisnika, ali tada bi se pojavilo drugo „čekanje“, uslužnog mjesta, tj. došlo bi do povećanja neiskorištenosti kapaciteta uslužnog mjesta a to je neracionalno.

²Zenzerović, Z: Teorija redova čekanja, stohastički procesi 2. dio, Pomorski fakultet u rijeci, Rijeka, 2003, str.2

³Sazdanović, S: Elementi operacijskih istraživanja, Naučna knjiga, Beograd 1980, str.63

U teoriji reda čekanja javljaju se tri osnovna pojma to su redom:

1. ulazne jedinice (korisnici, klijenti, potrošači)
2. kanali (uslužna mjesta, mjesta koja obavljaju obradu)
3. red čekanja (linija, gomilanje)

Pojam korisnika možemo identificirati kroz dva toka jedan na ulazu u sustav pa govorimo o ulaznom toku jedinica (tok dolazaka korisnika u sustav), odnosno izlaznom toku jedinica na izlazu (tok opsluživanja korisnika u sustavu). Tok dolazaka može biti npr. dolazak broda u luku, dolazak putnika u zračnu luku, dolasci stranaka pred šalter, kvarovi na strojevima, dok su primjeri toka opsluživanja iskrcaj broda, popravak strojeva, opsluživanje korisnika na šalteru i sl.

Sustav opsluživanja opisan je sljedećim elementima:

1. razdioba vremena dolaska jedinica (zahtjev za uslugu)
2. razdioba vremena opsluživanja
3. broj uslužnih mjesta (kanala opsluživanja)
4. kapacitet sustava opsluživanja
5. redoslijed opsluživanja jedinica odnosno disciplina reda i
6. broj stupnjeva usluge.⁴

Razdioba vremena dolaska jedinica (λ) definira se kao vrijeme koje je proteklo između dva uzastopna dolaska jedinica u sustav opsluživanja. Dolasci jedinica s obzirom na veličinu vremenskog razmaka između dva dolaska mogu biti:

- s jednakim intervalima vremena
- s nejednakim unaprijed određenim (determiniranim) vremenskim intervalima i
- s nejednakim intervalima vremena koji nisu unaprijed poznati tj. slučajni su, ali za koje je poznata njihova razdioba

Razdioba vremena opsluživanja (μ) definira se trajanjem opsluživanja, tj. duljinom vremena koje je potrebno da jedno uslužno mjesto opsluži jednu jedinicu. Trajanje ili vrijeme obavljanja usluge može biti:

⁴Kaufmann, A: Methodes et modeles de larechercheoperationnelle, Donod, Paris, 1970, str. 78

Kapacitet sustava opsluživanja (y) definira se kao maksimalan broj jedinica u redu čekanja koje se trebaju opslužiti i koje se trenutno opslužuju. Kada je sustav opsluživanja zauzet, jedinice koje pristižu u to vrijeme ne mogu se opslužiti, pa staju u red čekanja. Ako sustavi imaju velik kapacitet obično se definiraju kao sustavi s beskonačnim kapacitetom.

Disciplina reda odnosno načini na koji jedinice čekaju u redu čekanja da bi bile opslužene ima više, to su redom:

1. FIFO (first in –first out) je način koji uzima u obzir redoslijed dolaženja: tko je prvi došao bit će i prvi opslužen.
2. LIFO (last in – first out) je način koji daje prednost jedinici koja je zadnja ušla u red: zadnji ušao – prvi poslužen
3. PRIOR je oznaka prioriteta opsluživanja koji daje prednost nekim jedinicama za opsluživanje
4. SIRO se odnosi na slučajno odabiranje koje svakoj jedinici daje istu vjerojatnost opsluživanja bez obzira na vrijeme dolaska u red.
5. GD je oznaka za bilo koju drugu disciplinu čekanja.⁷

S obzirom na navedene elemente kojima se opisuje pojedini proces reda čekanja javila se potreba oznake vrste i tipa problema reda čekanja. U tu svrhu prihvaćena je **Kendall-ova notacija** oblika, $v/w/x/y/z$, prema kojoj navedena slova označavaju:

v – razdiobu vremena dolaska jedinica u sustav

w – razdiobu vremena opsluživanja jedinica

x – broj kanala opsluživanja

y – kapacitet sustava opsluživanja

z – disciplinu reda čekanja

Podatak o broju stupnjeva nije spomenut, jer sustavi s višestupnjevnom uslugom u teoriji redova čekanja, ne mogu biti analitički obrađeni. Naime, kod takvih redova čekanja korisnik usluge prolazi kroz više faza usluge koje su međusobno nezavisne, i to tako da je izlaskom iz jedne definiran ulaz u sljedeću fazu.⁸

⁷Zenzerović, Z: Teorija redova čekanja, stohastički procesi 2. dio, Pomorski fakultet u rijeci, Rijeka, 2003, str.5

⁸Žiljak, V: Simulacija računalom, Školska knjiga, Zagreb, 1982, str.110

Za v i w koriste se standardizirane oznake za razdiobe:

D – determinističko vrijeme između dolaska i opsluživanja

M – eksponencijalna razdioba

E – Erlangova razdioba reda k ($k=1,2,\dots$)

G – bilo koja razdioba (uključujući M, E i D)

Ako y i z nisu navedeni, onda se podrazumijeva da je $y = \infty$, a $z = \text{FIFO}$.

2.2. VRSTE REDOVA ČEKANJA

Postoji velik broj vrsta i tipova problema reda čekanja, uzrok tome je što se šest elemenata, navedenih u prethodnom poglavlju, koji služe za opis procesa opsluživanja mogu pojaviti u velikom broju varijacija.

Prema broju kanala razlikujemo *jednokanalni* i *višekanalni* problemi reda čekanja. Jednokanalni imaju jedno mjesto za opsluživanje, dok višekanalni imaju više takvih mjesta. Kod višekanalnih red može biti definiran na dva načina:

- zajednički, što znači da za svaki pojedinačni zahtjev nije definiran kanal na kojem će jedinica biti opslužena i sve do trenutka opsluživanja to može biti bilo koji od postojećih kanala, i
- odvojeni red čekanja za svako uslužno mjesto kad se zahtjev, ušavši u određeni red odabran prema nekom kriteriju opredijeli za određeno mjesto opsluživanja.⁹

Osim, prema broju kanala, red čekanja se razlikuje i prema načinu dolaska jedinica u sustav i vremena trajanja usluge te s obzirom na to razlikujemo *deterministički* i *stohastički* problemi reda čekanja. Kod determinističkog sustava vrijeme dolaska jedinica i vrijeme opsluživanja jedinica unaprijed je poznato i određeno. Takvi problemi rješavaju se jednostavnim računskim postupcima, samim tim u praksi neće doći do zagušenja sustava jer se raspoređuje dolasci i odlazak jedinica. Za razliku od determinističkih sustava, kod stohastičkih sustava dolasci jedinica i vrijeme opsluživanja jedinica slučajne su varijable npr. morska luka kao sustav

⁹Dobrenić, S: Operativno istraživanje, Fakultet organizacije i informatike, Varaždin, 1978, str.452

masovnog opsluživanja, iz ovoga možemo zaključiti da su stohastički sustavi predmet proučavanja teorije redova čekanja.

Nadalje, prema izvoru dolaska jedinica problem reda čekanja može biti *otvoren ili zatvoren*. Kod otvorenog sustava opsluživanja jedinica intenzitet dolaska ne zavisi od stanja sustava, a izvor korisnika usluga nalazi se izvan sustava. Dok, kod zatvorenih sustava opsluživanja intenzitet dolaska jedinica zavisi od stanja sustava, a izvori dolaska jedinica unutarnji su elementi sustava.¹⁰

Prema mogućnosti pojavljivanja jedinica u redu čekanja susrećemo se s dvije vrste sustava:

1. sustavi s čekanjem jedinica u redu i
2. sustavi s otkazima jedinica.

Sustavi s čekanjem sastoje se od dva djela prostora namijenjenog za čekanje i kanala opsluživanja. Ukoliko, su svi kanali opsluživanja zauzeti, jedinica je primorana stati u red čekanja i čekati na uslugu sve dok se jedan od kanala ne oslobodi. Kao primjer možemo uzeti opsluživanje broda u luci, ako su svi pristani zauzeti, brod staje u red čekanja tj. sidrište i čeka da se pristan oslobodi. Ograničenja kod sustava s čekanjem jedinica u redu mogu biti određena brojem mjesta u redu čekanja, maksimalno dozvoljeno vrijeme provedeno u redu i sl.

Sustav s otkaznim jedinicama je sustav gdje jedinice napuštaju sustav opsluživanja ukoliko su svi kanali zauzeti, u pravilu su to sustavi koji nemaju uređaje za formiranje redova.

Bez obzira da li se radi o sustavima s čekanjem ili sustavima s otkazima jedinica red čekanja može biti jednokanalni ili višekanalni i otvoreni ili zatvoreni problem.

Sustavi masovnog opsluživanja s čekanjem, prema mogućoj duljini reda čekanja, dijele se na „čiste“ i „mješovite“ sustave s čekanjem.¹¹ Ako broj mjesta u redu čekanja i vrijeme čekanja nisu ograničeni govorimo o čistim sustavima tj. jedinica ne dobiva otkaz, bit će poslužena prije ili kasnije. Dok, kod mješovitih sustava jedinice mogu čekati u redu ali isto tako mogu dobiti otkaz, zbog ograničenog broja mjesta u redu ili vremena čekanja koje korisnik ima na

¹⁰Zenzerović, Z: Teorija redova čekanja, stohastički procesi 2. dio, Pomorski fakultet u rijeci, Rijeka, 2003, str.7

¹¹Vukadinović, S: Elementi teorije masovnog opsluživanja, Naučna knjiga, Beograd, 1975, str.97

raspolaganju. U praksi susrećemo i s onim jedinicama koje nisu u stanju pričekati u redu, zbog određenih okolnosti, da budu opslužene. Neki autori njih nazivaju „nestrpljivim“. Od svih mogućih vrsta redova čekanja u praksi se najčešće javljaju sustavi s čekanjem. Kod kojih se javljaju dvije vrste problema ili jedinice čekaju na uslugu ako je njihov broj veći od broja kanala ili čekaju uslužna mjesta ako je broj jedinica manji u odnosu na broj kanala.

Od tipova sustava masovnog opsluživanja s čekanjem od posebnog značaja u tehnologiji prometa su sljedeći:

1. **Jednokanalni sustav s neograničenim brojem mjesta** u redu čekanja ($S = 1, m = \infty$)
2. **Višekanalni sustav s neograničenim brojem** u redu čekanja ($S > 1, m = \infty$)
3. **Jednokanalni sustav s ograničenim brojem mjesta** u redu čekanja ($S = 1, m$ je konačan broj)
4. **Višekanalni sustav s ograničenim brojem mjesta** u redu čekanja ($S > 1, m$ je konačan broj)
5. **Dvofazni sustav** masovnog opsluživanja s čekanjem. Jedinica se opslužuje u dvjema fazama; najprije se opslužuje prvim kanalom, ako je taj zauzet, onda jedinica stane u red čekanja dok ne dođe na red za opsluživanje. nakon opsluživanja u prvom kanalu, jedinica pristupa na opsluživanje drugim kanalom i ako je kanal zauzet ponovo staje u red čekanja.
6. **Sustav s potpunom uzajamnom pomoći** među kanalima. Radi se o sustavu u kojem će jedinica biti opslužena od bilo kojeg kanala ako su svi kanali slobodni.
7. **Sustav s prioritetom u opsluživanju**. Sam naziv ukazuje na prioritet opsluživanja koji pripada pojedinim jedinicama. Kod sustava s apsolutnim prioritetom, jedinica s prioritetom odmah se prima na opsluživanje bez obzira da li se u kanalu već opslužio ili ne korisnik nižeg ranga prioriteta. U sustavu s relativnim prioritetom, jedinica bez prioriteta opslužuje se do kraja, a zatim se prihvaća na opsluživanje jedinica s prioritetom.¹²

¹²Zenzerović, Z: Teorija redova čekanja, stohastički procesi 2. dio, Pomorski fakultet u rijeci, Rijeka, 2003, str.8

3. PARAMETRI SUSTAVA MASOVNOG USLUŽIVANJA

Radi boljeg razumjevanja sustav masovnog opsluživanja, bez obzira o kakvom se sustavu radi, potrebno je odrediti parametre sustava. Najvažniji parametri sustava masovnog opsluživanja su: intenzitet toka dolazaka jedinica (λ), intenzitet opsluživanja po kanalu (μ) te broj kanala koji stoji na raspolaganju za opsluživanje (S).

3.1. TOKOVI DOLASKA JEDINICA I DULJINE VREMENA NJIHOVOG OPSLUŽIVANJA

Ulazni tok je događaj koji se pojavljuje prilikom ulaza u sustav. Tok *dolaska jedinica* je slijed jedinica jedne za drugom u sustav opsluživanja u trenucima vremena slučajno raspoređenih u promatranom vremenskom intervalu. Analogno tomu se definira i *tok izlaska* jedinica iz sustava opsluživanja.¹³ Razlikujemo *jednorodne (homogene)* i *nejednorodne (nehomogene)* tokove, što ovisi o tome da li jedinice pripadaju istim ili različitim vrstama. Događaji u jednorodnom toku razlikuju se jedino po trenutku pojavljivanja. Primjer nehomogenih tokova je dolazak brodova različitih vrsta u lučki sustav.

Ukoliko jedinice koje pristižu u sustav dolaze u točno određenim trenucima, takav tok nazivamo *regularan*, u praksi se ovi tokovi vrlo rijetko pojavljuju, ako se dolasci pojavljuju u slučajno odabranim trenucima govorimo o *neregularnom (slučajnom)* toku.

Jednostavni slučajni tokovi su tokovi koji osim slučajnih dolazaka (u slučajno izabranim trenucima) imaju ova svojstva:

1. odsutnost posljedica
2. ordinarnost
3. stacionarnost¹⁴

Ako dolazak jedne jedinice u sustav ne zavisi od drugih jedinica govorimo o *toku bez posljedica*. Primjer takvog toka je dolazak korisnika u poštu koji ne zavisi od dolaska ili nedolaska drugih korisnika.

¹³Zečević, T: Operacijska istraživanja, Naučna knjiga, Beograd, 1974, str.121

¹⁴Zenzerović, Z: Teorija redova čekanja, stohastički procesi 2. dio, Pomorski fakultet u rijeci, Rijeka, 2003, str.9

U praksi se susrećemo s *ordiniranim i neordiniranim* tokom, iako je neordinirani tok događaja rjeđi oblik, koji se može svesti na ordinirani tako da se u sustavima u kojima se događaji javljaju u paru ili trojkama može uzeti pretpostavka da par ili trojka čine jedinstveni događaj. Dakle, tok je ordiniran ako u nekom proizvoljno malom vremensko intervalu može doći samo jedna ili ni jedna jedinica. Uvjet ordiniranosti pretpostavlja da jedinice pristupaju u sustavu opsluživanja pojedinačno.

Ukoliko, je tok nezavisan od vremena on je *stacionaran*. Tok dolazaka, kao što smo već spomenuli, izražava se prosječnim brojem dolazaka jedinica u jedinici vremena. Prosječan broj dolazaka jedinica u jedinici vremena može se smatrati konstantnim. Dakle, iz ovoga možemo zaključiti da stacionarni procesi pokazuju slučajna kolebanja oko srednje vrijednosti. Kod stacionarnog toka intenzitet toka ne zavisi od vremena, već je konstanta jednaka prosječnom broju jedinica koje pristižu u sustav. U realnim slučajevima tok je rijetko stacionaran pa se vremenska os dijeli na male vremenske intervale na kojima je proces stacioniran te se za svaki interval računa prosječni intenzitet toka, koji se mijenja.

Potrebno je spomenuti i *Poissonov tok* koji ima svojstvo ordiniranosti i svojstvo odsutnosti posljedica, on ima i osobinu stabilnosti koja podrazumijeva da se pri zbrajanju Poissonovih tokova dobiva ponovo Poissonov tok, pri čemu se intenziteti toka zbrajaju. Primjer takvog toka je dolazak brodova u luku za luke s velikim prometom ili tok aviona koji slijeću na aerodrom. Jednostavan tok događaja je, zapravo, stacioniran Poissonov tok događaja. Sustavi kod kojih tokovi događaja ispunjavaju svojstva stacionarnosti, odsutnost posljedica i ordinarnosti nazivaju se Markovljevi jednostavni sustavi, za sustave masovnog opsluživanja najčešće se pretpostavlja da je riječ o takvim sustavima. Često se dozvoljava da je sustav nestacionaran, ali se pretpostavke za druga dva svojstva zadržavaju.¹⁵

3.2. RAZDIOBA TOKA DOLAZAKA I DULJINE REMENA OPSLUŽIVANJA JEDINICA

Ukoliko su dolasci jedinica u sustav deterministički dovoljno je znati koliko iznosi prosječan broj jedinica koje su pristigle u sustav u jedinici vremena (λ) ili vremenski razmak između

¹⁵Zenzerović, Z: Teorija redova čekanja, stohastički procesi 2. dio, Pomorski fakultet u rijeci, Rijeka, 2003, str.11

dva uzastopna dolaska (t_{dol}). Međutim, u praksi je češći slučaj da su dolasci jedinica stohastički (slučajni), a tada je potrebno znati, osim gore navedenog, i njihove razdiobe vjerojatnosti. Velik je broj različitih razdioba dolazaka jedinica u sustav opsluživanja, u teoriji one se opisuju razdiobama koje najbolje odgovaraju konkretnoj situaciji, ali takve razdiobe su ipak aproksimacija stvarnih procesa. U praksi se pojavljuju tri razdiobe dolazaka.

Razdiobe dolazaka najčešće se klasificiraju prema vrsti dolazaka na:

1. pravilno distribuirane dolaske
2. slučajne dolaske
3. općenito nezavisno distribuirane dolaske ¹⁶

Pravilno distribuirani dolasci (D) odnose se na razdiobu dolazaka u vremenu kad jedinice dolaze u jednakim vremenskim razmacima, za intenzitet dolazaka koristi se ova formula $\lambda = \frac{1}{t_{dol}}$, gdje je t_{dol} vremenski razmak između dva uzastopna dolaska.

Potpuno slučajni dolasci (M) odnose se na jedinice koje slučajno stižu u sustav s prosječnim vremenskim intervalom između dva uzastopna dolaska (t_{dol}) ili prosječnim brojem jedinica (λ). U ovom slučaju potrebno je odrediti razdiobu vjerojatnosti, razdioba broja pristiglih jedinica može se opisati poissonovom gustoćom razdiobe pomoću formule $P_n = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$;

$$t \geq 0, \quad n = 1, 2, \dots,$$

a razdioba vremenskih intervala (s k uzastopnih dolazaka) Erlangovom gustoćom razdiobe $E_k = \frac{1}{(k-1)!} \lambda^k t^{k-1} e^{-\lambda t}$; $t \geq 0, \quad k = 1, 2, \dots$.

Kada je za razdiobu vremenskih intervala između dva uzastopna dolazaka $k = 1$, Erlangova razdioba prelazi u eksponencijalnu gustoću razdiobe.

Procesi opsluživanja sa slučajnim dolascima karakteriziraju ove značajke:

1. prosječno vrijeme između dva uzastopna dolaska = $1/\lambda$
2. standardna devijacija vremena međudolaska = $1/\lambda$
3. koeficijent varijacije iznosi 1 (100%)¹⁷

¹⁶Barković, D: Operacijska istraživanja, Ekonomski fakultet, Osijek, 2001

Općenito nezavisni distribuirani dolasci (G ili GI) su dolasci s intenzitetom dolazaka λ , dok je razdioba međudolazaka određena nekom općom funkcijom razdiobe $F(t)$, čija je gustoća $f(t)$.

Vrijeme opsluživanja je vrijeme potrebno za opsluživanje, odnosno za obavljanje određene usluge, jedinice. Vremenom opsluživanja izražava se propusna moć kanala za opsluživanje. Ona se može analizirati slično kao i dolasci jedinica, ali pri tome postoji bitna razlika, dolasci jedinica distribuirani su unutar cijelog promatranog vremenskog intervala, dok je opsluživanje definirano samo kad se u sustavu nalaze jedinice, ukoliko nema ni jedne jedinice kanal je neiskorišten.

Vrijeme opsluživanja može biti:

1. konstantno (D)

2. distribuirano prema **eksponencijalnoj razdiobi (M)** čija je gustoća

$$\text{Exp}(t) = \mu e^{-\mu t}; t \geq 0, \mu \text{ je intenzitet opsluživanja}$$

3. distribuirano prema **Erlangovoj razdiobi k – tog reda (Ek)** čija je gustoća

$$E_k(t) = \frac{1}{(k-1)!} \mu^k t^{k-1} e^{-\mu t} \text{ gdje je } k \text{ cjelobrojna vrijednost, } t \geq 0$$

4. distribuirano prema **općenitoj razdiobi (G)** tj. varijabilno, ali unaprijed određeno.¹⁸

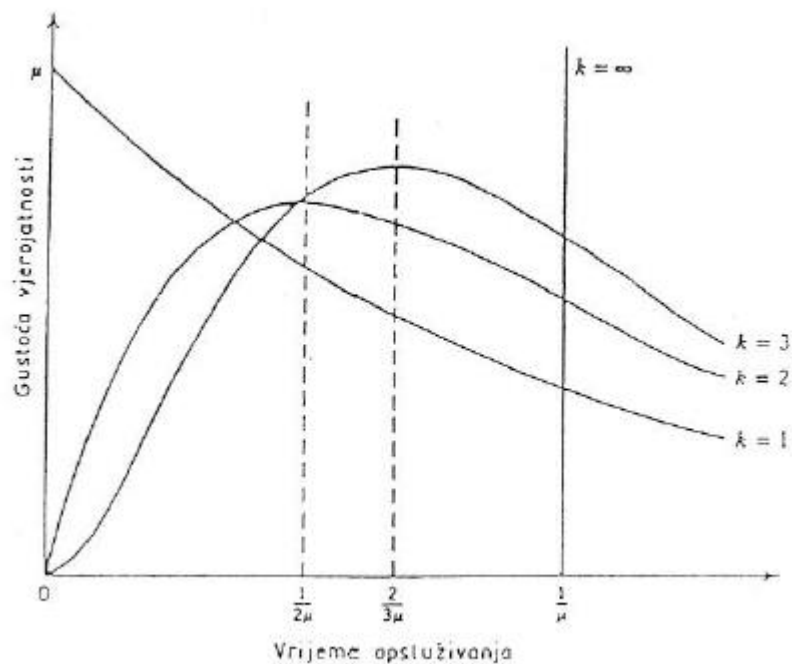
Vrlo je rijetko, da je u praksi vrijeme opsluživanja konstantna vrijednost, najčešće se vrijeme obavljanja usluga mijenja ovisno od slučaja, to znači da je vrijeme opsluživanja slučajna varijabla te se može opisati odgovarajućom razdiobom vjerojatnosti.

Na grafikonu 1. prikazana je gustoća Erlangove razdiobe vremena opsluživanja za različite vrijednosti parametra k , koji je odnos kvadrata prosječne vrijednosti vremena opsluživanja i njegove varijance ili odnos između kvadrata duljine vremena opsluživanja i standardnog odstupanja ili odnos između jedinice i kvadrata koeficijenta varijacije duljine vremena opsluživanja.

¹⁷Zenzerović, Z: Teorija redova čekanja, stohastički procesi 2. dio, Pomorski fakultet u rijeci, Rijeka, 2003, str.12

¹⁸Žiljak, V: Simulacija računalom, Školska knjiga, Zagreb, 1982, str.118

Grafikon 1. Gustoća Erlangove razdiobe vremena opsluživanja za $k=1,2,3$



Izvor: Zenzerović, Z.: Optimizacijski modeli planiranja kapaciteta morskih luka, doktorska disertacija, Ekonomski fakultet Rijeka, Rijeka, 1995, str.65

Zaključak je da za tokove dolazaka i opsluživanja jedinica u sustav masovnog opsluživanja vrijedi:

- tok dolaska i odlaska jedinica u/iz sustava opsluživanja je stohastički proces,
- razdioba vremena između dva uzastopna dolaska jedinica u sustav opsluživanja je najčešće eksponencijalna razdioba s parametrom λ ,
- vrijeme trajanja opsluživanja također se najčešće odvija prema eksponencijalnoj razdiobi s parametrom μ ,
- uz pretpostavku eksponencijalne razdiobe, vjerojatnost da se u dovoljno malom intervalu t pojavi, odnosno opsluži jedna jedinica je $\lambda\Delta t$, odnosno $\mu\Delta t$,
- vjerojatnost da će u sustav prispjeti n jedinica određuje se prema Poissonovoj razdiobi.¹⁹

¹⁹Bešlić, S: Markovljevi modeli u planiranju kapaciteta lučkih sredstava za rad, magistarski rad, Pomorski fakultet u Rijeci, Rijeka, 2001, str.79

3.3. ODREĐIVANJE PARAMETARA SUSTAVA OPSLUŽIVANJA

Parametri su numeričke vrijednosti koje karakteriziraju promatrani sustav. Potrebno je istaknuti tri parametra koji su osnova za analizu sustava masovnog opsluživanja a to su:

- λ - intenzitet toka dolazaka jedinica ili prosječan broj korisnika koji pristižu u jedinici vremena
- μ - intenzitet opsluživanja po kanalu ili prosječan broj korisnika koji pristižu u jedinici vremena
- s – broj kanala

Kako bi se moglo analizirati funkcioniranje problema reda čekanja, određuje se broj jedinica koje pristižu u sustav, radi obavljanja određene usluge ili obrade u jedinici vremena. Broj jedinica nije u svakoj jedinici vremena jednak zbog slučajnih dolazaka, pa se stoga uzima prosječan broj jedinica u jedinici vremena koji se još naziva *intenzitet toka dolazaka* (λ). Svako uslužno mjesto ima određeni kapacitet koji se izražava brojem usluga koje može obaviti u jedinici vremena. Prosječan broj jedinica koji se mogu opslužiti u jedinici vremena naziva se *intenzitet opsluživanja* po kanalu (μ). Intenzitet toka dolaska (λ) i intenzitet opsluživanja (μ) osnovni su parametri koji određuju problem reda čekanja, pritom λ označava kapacitet izvora odakle pristižu jedinice u sustav opsluživanja, a μ kapacitet uslužnih mjesta, te veličine izračunavaju se kao aritmetičke sredine ali uz uvjet da su poznati podaci o dolascima i broju usluga u promatranoj jedinici vremena.

Količnik intenziteta toka dolazaka i intenziteta opsluživanja je *pokazatelj iskoristivosti* (odnosno opterećenja) uslužnog mjesta, označava se slovom ρ .

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

U literaturi postoji više različitih naziva za parametar ρ , neki od njih su: faktor opsluživanja (po kanalu), faktor opsluživanja sustava, faktor iskorištenja uslužnog mjesta, stupanj zauzetosti, stupanj opterećenja mjesta za posluživanje, intenzitet prometa po jednom mjestu i mnogi drugi, ali svi ti nazivi sadrže iste ključne riječi poput: faktor, stupanj, koeficijent ili intenzitet zatim opsluživanje, iskorištenje, opterećenje, zauzetost, i na koncu kanal, uslužno mjesto, stanica.

S obzirom na broj uslužnih mjesta potrebno je razlikovati ρ i ρ_s . ρ je veličina koja se odnosi samo na jedno uslužno mjesto, dok se ρ_s odnosi na sustav s više kanala. U slučaju kada je $\rho < 1$, ovisno o situaciji, korisnik će biti opslužen prije ili kasnije, ako je $\rho_s \geq 1$ tijekom vremena će se nagomilavanje povećavati i sustav neće moći normalno funkcionirati tj. doći će do zagušenja, dakle ρ ne smije biti veći ili jednak 1 da bi sustav bio stabilan, samim tim zaključujemo da λ mora biti manji od μ . Ukoliko to nije slučaj treba povećati broj kanala za opsluživanje kako bi sustav normalno funkcionirao. Dakle $0 < \rho_s < 1$, međutim, ovaj uvjet vrijedi za sustave s neograničenom duljinom reda, jer kod redova s ograničenom duljinom reda ne može doći do zagušenja pošto je red čekanja ograničen, jedinica koja ne stane u red dobiva „otkaz“. Budući da je ρ odnos broja pristiglih i opsluženih korisnika, on pokazuje koliko je opterećenje kanala, odnosno njegovo iskorištenje ili mjeru njegove upotrebljivosti stoga možemo definirati da je:

1. $\rho = \lambda/\mu$ - stupanj opterećenja kanala
2. $\rho_s = \rho/S$ – koeficijent iskorištenja sustava ²⁰

ρ i ρ_s mogu dobiti naziv i prema konkretnom slučaju radi boljeg razumjevanja, primjerice: stupanj iskorištenja pristana i koeficijent iskorištenja lučkog sustava.

²⁰Zenzerović, Z: Teorija redova čekanja, stohastički procesi 2. dio, Pomorski fakultet u rijeci, Rijeka, 2003, str.17

4. POKAZATELJI FUNKCIONIRANJA SUSTAVA MASOVNOG OPSLUŽIVANJA

Na temelju parametara i određenih svojstava sustava masovnog opsluživanja izračunavaju se odgovarajući pokazatelji, tim se veličinama objašnjava funkcioniranje sustava masovnog opsluživanja a to su:

1. Stupanj opterećenja uslužnog mjesta (ρ),
2. Koeficijent iskorištenja sustava (ρ/S),
3. Vjerojatnost da se u sustavu ne nalazi ni jedna jedinica, tj. da je kapacitet uslužnog mjesta neiskorišten (P_0),
4. Vjerojatnost da n jedinica nalazi u sustavu opsluživanja, tj. da se n jedinica upravo opslužuje ili da čekaju u redu da budu opslužene (P_n),
5. Vjerojatnost da jedinica koja ulazi u sustav neće biti opslužena, tj. da će dobiti otkaz; vjerojatnost otkaza (neusluživanja) (P_{otk})
6. Vjerojatnost da će jedinica koja ulazi u sustav biti opslužena; vjerojatnost opsluživanja, odnosno relativna propusna sposobnost sustava opsluživanja ($P_{ustl}=Q_R$)
7. Apsolutna sposobnost sustava je broj jedinica koje će biti opslužene u jedinici vremena (Q_A)
8. Prosječan broj jedinica u redu čekanja (L_Q)
9. Prosječan broj jedinica u sustavu opsluživanja, tj. broj jedinica u redu čekanja plus one jedinice koje se upravo opslužuju (L)
10. Prosječan broj jedinica koji se upravo opslužuje ($L_{ustl}=L-L_Q$)
11. Prosječno vrijeme provedeno u redu čekanja, tj. vrijeme čekanja jedinice prije nego što je opslužena (W_Q)
12. Prosječno vrijeme provedeno u sustavu opsluživanja, tj. vrijeme čekanja jedinice u redu i vrijeme opsluživanja (W)
13. Prosječno vrijeme opsluživanja jedinice ($W_{ustl}=W-W_Q$)
14. Prosječan broj slobodnih (nezauzetih) uslužnih mjesta ($S-\rho$)
15. Vjerojatnost da su sva uslužna mjesta (kanali) zauzeta, tj. da će jedinica čekati ($P(n \geq S)$)

Svi pokazatelji izračunavaju se prema formulama ovisno o kojem se tipu problema radi. Kao što je u poglavlju 1.2 *Vrste redova čekanja* navedeno, najznačajniji tipovi sustava masovnog opsluživanja su: jednokanalni sustav s neograničenim brojem mjesta u redu čekanja, jednokanalni sustav s čekanjem i ograničenom duljinom reda čekanja, višekanalni sustav s čekanjem i neograničenom duljinom reda čekanja te višekanalni sustav s čekanjem i ograničenom duljinom reda čekanja, za svaki sustav se pokazatelji računaju prema određenim formulama.

4.1. JEDNOKANALNI SUSTAV S ČEKANJEM I NEOGRANIČENOM DULJINOM REDA ČEKANJA (M/M/1/∞)

Oznaka (M/M/1/∞) ukazuje da je sustav s čekanjem, jednim kanalom i beskonačnim brojem jedinica koje mogu biti u redu čekanja, a vrijeme između dva uzastopna dolaska jedinica u sustav opsluživanja i vrijeme opsluživanja ponašaju se prema eksponencijalnoj razdiobi. Za računanje pokazatelja tog reda čekanja koristimo sljedeće formule:

1. $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$; $\rho < 1$
2. $P_n = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) * \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = (1 - \rho) * \rho^n$, $n = 1, 2, \dots$
 $P_n = \rho * P_{n-1}$, $n = 1, 2, \dots$
3. $P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu} = 1 - \rho$
4. $L_Q = \frac{\mu^2}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{\rho^2}{1 - \rho}$
5. $L = L_Q + \rho = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{\rho}{1 - \rho}$
6. $L_{usl} = L - L_Q = \rho$
7. $W_Q = \frac{L_Q}{\lambda} = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{\rho}{\mu - \lambda}$
8. $W = \frac{L}{\lambda} = W_Q + \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu - \lambda}$
9. $W_{usl} = W - W_Q = \frac{1}{\mu}$

4.2. JEDNOKANALNI SUSTAV S ČEKANJEM I OGRANIČENOM DULJINOM REDA ČEKANJA (M/M/1/M)

Oznaka (M/M/1/m) znači da je sustav s čekanjem, jednim kanalom i konačnim brojem jedinica koje se nalaze u redu čekanja (m predstavlja broj mjesta u redu čekanja) kao i vremenom međudolazaka i vremenom opsluživanja jedinica u redu čekanja prema eksponencijalnoj razdiobi.

Intenzitet toka dolaska sa n jedinica ili korisnika u sustavu izražava se :

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda & \text{za } n = 0, 1, \dots, m-1 \\ 0 & \text{za } n = m, m+1 \end{cases}$$

Za pokazatelje toga reda čekanja koriste se sljedeće formule :

$$1. \quad \rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

$$2. \quad P_0 = (1 + \rho + \rho^2 + \dots + \rho^{m+1})^{-1} = \frac{1-\rho}{1-\rho^{m+2}} \quad \text{za } \rho \in (0, \infty) \setminus \{1\}$$

$$P_0 = \frac{1}{m+2} \quad \text{za } \rho = 1$$

$$3. \quad P_n = \rho^n * \rho_0 \quad n = 1, 2, \dots, m+1$$

$$\text{dok je prema Bronsonu } P_n = \begin{cases} \frac{\rho^n(n+1)}{1-\rho^{m+1}} & \text{za } \rho \neq 0 \\ \frac{1}{m+2} & \text{za } \rho = 1 \end{cases}$$

$$4. \quad P_{\text{otk}} = \rho_{m+1} = \rho^{m+1} * P_0$$

$$5. \quad P_{\text{usl}} = Q_R = 1 - P_{\text{otk}} = \frac{1-\rho^{m+1}}{1-\rho^{m+2}}$$

$$6. \quad Q_A = \lambda * Q_R = \lambda * P_{\text{usl}} = \lambda (1 - P_{\text{otk}}) = \lambda \frac{1-\rho^{m+1}}{1-\rho^{m+2}}$$

$$7. \quad L_Q = 1 * P_2 + 2 * P_3 + \dots + m * P_{m+1} = \rho^2 * P_0 (1 + 2\rho + \dots + m\rho^{m-1}) \text{ ili}$$

$$L_Q = \rho \frac{2(1-\rho^m(m+1-m\rho))}{(1-\rho^{m+2})(1-\rho)} \quad \text{za } \rho \in (0, \infty) \setminus \{1\}$$

$$\text{Za } \rho = 1, \text{ budući da je } P_0 = \frac{1}{m+2}, \text{ dobiva se da je } L_Q = P_0 * \frac{m(m+1)}{2} = \frac{1}{m+2} * \frac{m(m+1)}{2}$$

$$8. \quad L_{\text{usl}}^{12} = 0 * P_0 + 1 * (1 - P_0) = \frac{\rho - \rho^{m+2}}{1 - \rho^{m+2}}$$

$$9. \quad L = L_Q + L_{\text{usl}} = L_Q + \frac{\rho - \rho^{m+2}}{1 - \rho^{m+2}}$$

$$10. W_Q = \frac{L_Q}{\lambda} = P_1 * \frac{1}{\mu} + P_2 * \frac{2}{\mu} + \dots + P_m * \frac{m}{\mu}$$

$$11. W = W_Q + P_{usl} * \frac{1}{\mu} = \frac{L}{\lambda}$$

$$12. W_{usl} = W - W_Q$$

4.3. VIŠEKANALNI SUSTAV S ČEKANJEM I NEODRANIČENOM DULJINOM REDA ČEKANJA (M/M/S/∞)

Oznaka (M/M/S/∞) odnosi se na sustav s čekanjem i to s S kanala i beskonačnim brojem jedinica u redu čekanja s tim da se vrijeme između dva uzastopna dolaska i vrijeme opsluživanja jedinica u redu čekanja ponašaju prema eksponencijalnoj razdiobi. Intenzitet opsluživanja u sustavu s S kanala i n jedinica u sustavu iznosi :

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu & \text{za } n = 0, 1, \dots, S \\ S\mu & \text{za } n = S + 1, S + 2, \dots \end{cases}$$

Koeficijent iskorištenja sustava je :

$$\rho_s = \frac{\lambda}{S\lambda} < 1$$

Pokazatelji reda čekanja M/M/S/∞ izračunavaju se prema sljedećim formulama :

$$1. P_0 = \left[\sum_{n=0}^{S-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^S}{S!(1-\rho/S)} \right]^{-1} \quad \text{ili}$$

$$P_0 = \left[1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \dots + \frac{\rho^S}{S!} + \frac{\rho^{S+1}}{S!(S-\rho)} \right]^{-1}$$

$$2. P_n = \begin{cases} \frac{\rho^n}{n!} * P_0 & \text{za } 1 \leq n \leq S \\ \frac{\rho^n}{S!S^{n-S}} & \text{za } n \geq S \end{cases}$$

ili prema rekurzivnim formulama :

$$P_n = \begin{cases} \frac{\rho}{n} * P_{n-1} & \text{za } 1 \leq n \leq S \\ \frac{\rho}{S} * P_{n-1} & \text{za } n \geq S \end{cases}$$

$$3. P(n \geq S) = \sum_{n=S}^{\infty} P_n = \frac{\rho^S}{S!(1-\frac{\rho}{S})} * P_0$$

$$4. L_Q = \frac{\rho^{S+1}}{(S-1)!(S-\rho)^2} * P_0$$

$$5. L = L_Q + \rho$$

6. $L_{\text{usl}}^{16} = \rho = L - L_Q$
7. $W_Q = \frac{L_Q}{\lambda} = \frac{\rho^{S+1}}{\lambda * (S-1)! (S-\rho)^2} * P$
8. $W = W_Q + \frac{1}{\mu} = \frac{L}{\lambda}$
9. $W_{\text{usl}} = W - W_Q$

4.4. VIŠEKANALNI SUSTAV S ČEKANJEM I NEOGRANIČENOM DULJINOM REDA ČEKANJA (M/M/S/∞)

Kod ovog sustava (M/M/S/∞) se susrećemo s S kanala, n jedinica u sustavu i m mjesta u redu čekanja (S ≤ m) za intenzitet toka dolazaka i intenzitet opsluživa vrijedi sljedeće :

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda & \text{za } n = 0, 1, \dots, m-1 \\ 0 & \text{za } n = m, m+1 \dots \end{cases}$$

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu & \text{za } n = 0, 1, \dots, S \\ s\mu & \text{za } n = S+1, S+2 \dots \end{cases}$$

Pokazatelji kod ove vrste reda čekanja izračunavaju se ovako :

1. $\rho_s = \frac{\lambda}{s\mu}$
2. $P_0 = \left[\sum_{n=0}^S \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^S}{S!} * \frac{\rho - (\frac{\rho}{S})^{m+1}}{1-\rho/S} \right]^{-1}$ ili
 $P_0 = \left[1 + \rho + \frac{\rho^2}{2} + \dots + \frac{\rho^S}{S!} + \frac{\rho^S}{S!} * \frac{\rho - (\frac{\rho}{S})^{m+1}}{1-\rho/S} \right]^{-1}$ za $\rho_s > 1$
 Ako je $\rho_s > 1$, vjerojatnost P_0 izračunava se ovako:
 $P_0 = \left(\sum_{n=0}^S \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{S+1}}{S!} * \frac{1 - (\frac{\rho}{S})^m}{S-\rho} \right)^{-1}$,
 a za $\rho_s = 1$
 $P_0 = \left(\sum_{n=0}^S \frac{\rho^n}{n!} + m * \frac{\rho^S}{S!} \right)^{-1}$
3. $P_n = \begin{cases} \frac{1}{n!} \rho^n * P_0 & \text{za } n \leq S \\ \frac{1}{S! S^{n-S}} \rho^n * P_0 & \text{za } S < n \leq m \\ 0 & \text{za } n > m \end{cases}$
4. $P_{\text{otk}} = P_{S+m} = \frac{\rho^{S+m}}{S^m * S!} * P_0$

$$5. P_{usl} = 1 - P_{otk} = Q_R$$

$$6. Q_A = \lambda * P_{usl}$$

$$7. L_Q =$$

$$L_Q = \frac{\rho^{S+1}}{S * S!} * P_0 * \frac{1 - (m+1) * (\frac{\rho}{S})^m + m * (\frac{\rho}{S})^{m+1}}{(1 - \rho/S)^2}$$

$$8. L_{usl} = \frac{Q_A}{\mu} = \frac{\lambda * P_{usl}}{\mu} = \rho * P_{usl}$$

$$9. L = L_Q + L_{usl}$$

$$10. W_Q = \frac{L_Q}{\lambda}$$

$$11. W = \frac{L}{\lambda} = W_Q + \frac{1}{\mu} * P_{usl}$$

$$12. W_{usl} = W - W_Q = \frac{1}{\mu} = \left(1 - \frac{\rho^{S+m}}{S^m * S!} * P_0\right)$$

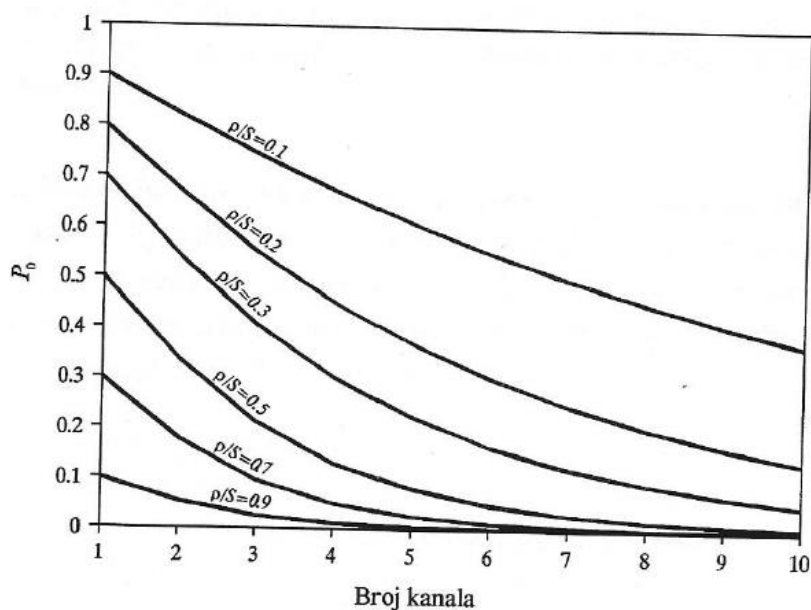
4.5. ANALIZA MEĐUZAVISNOSTI POKAZATELJA U SUSTAVU OPSLUŽIVANJA

Temeljem formula iz prošlog poglavlja izračunavaju se pokazatelji u sustavu opsluživanja, koji međusobno zavise, ovisno o promjenama nekih parametara a ponajviše od broja uslužnih mjesta (kanala).

Povećanje broja kanala uzrokuje promjene pokazatelja sustava opsluživanja a to su: iskorištenost kanala, očekivani broj jedinica u redu čekanja kao i u sustavu te vrijeme jedinice u redu čekanja ali i ukupno vrijeme boravka jedinice u sustavu.²¹ Dakle, povećanje broja kanala znači povećanje kapaciteta za jednak broj pristiglih jedinica ali samim tim povećava se i vjerojatnost neiskoristivosti kanala. Porast parametra ρ (količnik intenziteta toka dolazaka i intenziteta opsluživanja) utječe na povećanje iskorištenosti kanala pa se zbog toga smanjuje P_0 (vjerojatnost da je kapacitet uslužnog mjesta neiskorišten). Ako u obzir uzimamo ρ/s situacija je obrnuta, zbog činjenice da ρ/s ne daje jednaku vrijednost ρ za različit broj kanala npr. : $\mu=1$ povećanje broja kanala ρ/s znači da je intenzitet dolazaka jedinica smanjen, λ kod jednog kanala, $\lambda/2$ za dva kanala itd. To je prikazano na grafikonima 2 i 3.

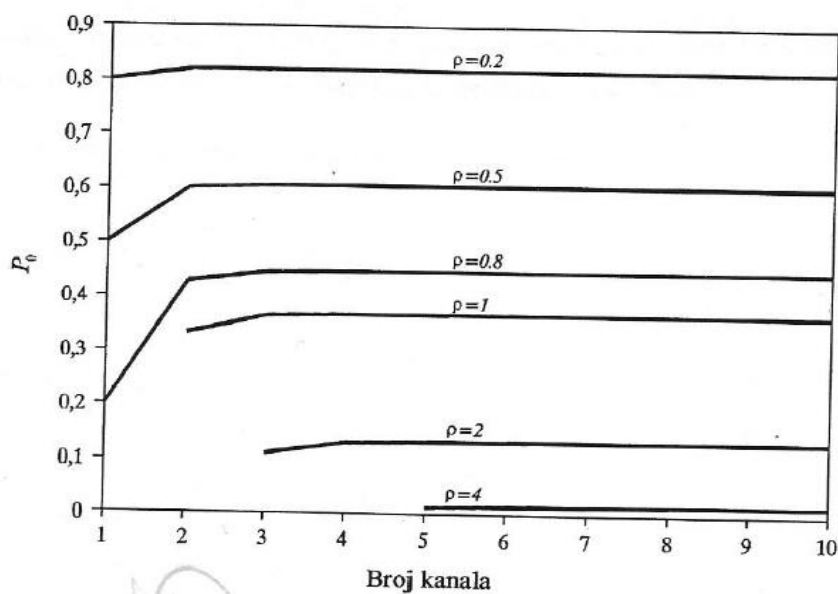
²¹Zenzerović, Z: Teorija redova čekanja, stohastički procesi 2. dio, Pomorski fakultet u rijeci, Rijeka, 2003, str.29

Grafikon 2. Zavisnost vjerojatnosti P_0 od broja kanala (S) i koeficijenta iskorištenja sustava (ρ/S)



Izvor: Zenzerović, Z: Teorija redova čekanja, stohastički procesi 2. dio, Pomorski fakultet u rijeci, Rijeka, 2003, str.30

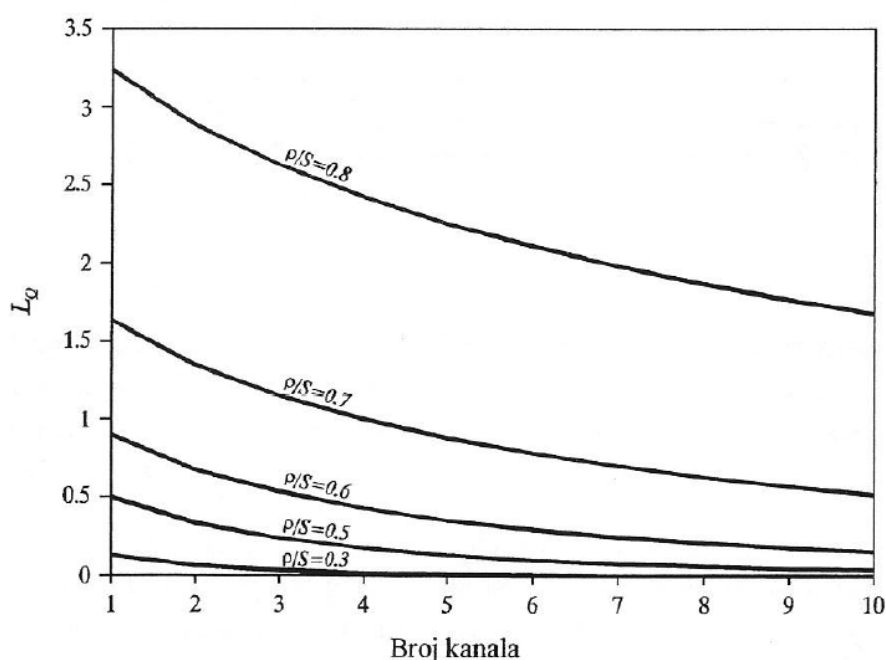
Grafikon 3. Zavisnost vjerojatnosti P_0 od broja kanala (s) i stupnja opterećenja kanala (ρ)



Izvor: Zenzerović, Z: Teorija redova čekanja, stohastički procesi 2. dio, Pomorski fakultet u rijeci, Rijeka, 2003, str.30

Pokazatelj L_Q , ukazuje na očekivani broj jedinica u redu čekanja. Povećanjem broja kanala, ukoliko, je intenzitet pristizanja jedinica isti (λ) jedinice se raspoređuje na veći broj kanala i samim tim se pokazatelj L_Q (prosječan broj jedinica u redu čekanja) smanjuje. Zaključujemo da će očekivani broj jedinica u redu čekanja bit veći za veći ρ/s , jer ako je $\mu=1$, veći ρ/s znači da je broj pristiglih jedinica veći (λ), to se kod jednakog broja kanala odražava na povećanje reda čekanja. To je prikazano na grafikonu 5.

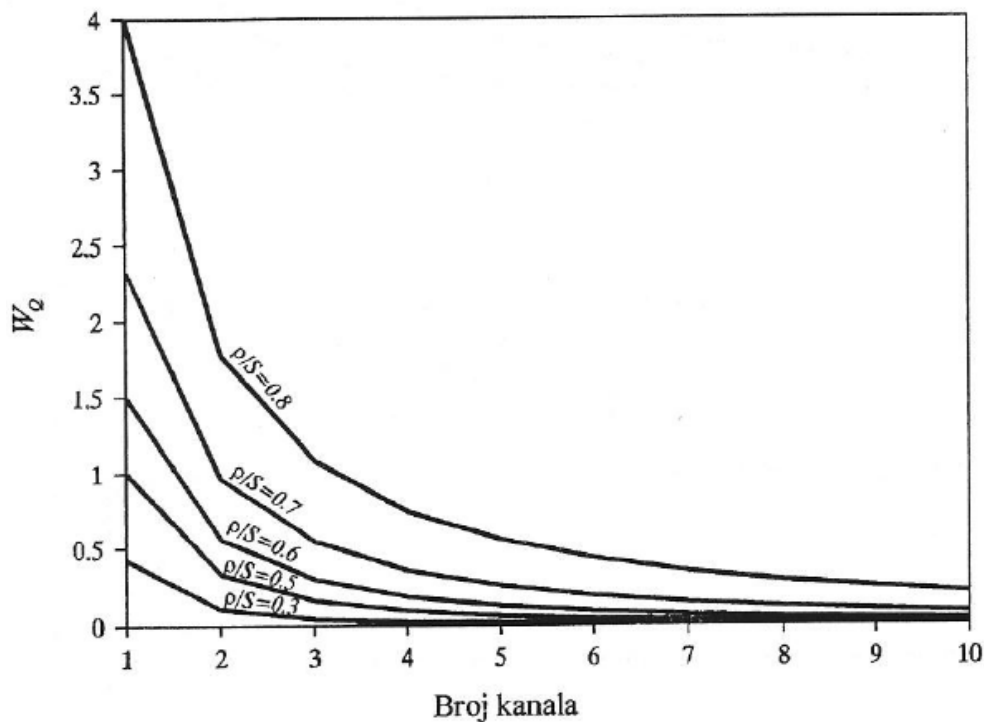
Grafikon 4. Zavisnost prosječnog broja jedinica u redu čekanja (L_Q) od broja kanala (S) i koeficijenta iskorištenja sustava (ρ /S)



Izvor: Zenzerović, Z: Teorija redova čekanja, stohastički procesi 2. dio, Pomorski fakultet u rijeci, Rijeka, 2003, str.32

Dok kod **pokazatelja W_Q** , koji se odnosi na očekivano vrijeme čekanja jedinica, degresivno pada s povećanjem broja kanala čak i za jednak broj kanala pokazatelj W_Q je veći za veću vjerojatnost ρ/s . Međutim, kod pokazatelja W_Q degresija je veća nego kod P_w i L_Q . Dakle, kretanje pokazatelja W_Q isto je kao kod pokazatelja L_Q , pa vrijede ista pravila koja su obrazložena u prethodnom tekstu. To je prikazano na grafikonu 6.

Grafikon 5. Zavisnost prosječnog vremena čekanja jedinice (W_Q) od broja kanala (S) i koeficijenta iskorištenja sustava (ρ/S)



Izvor: Zenzerović, Z: Teorija redova čekanja, stohastički procesi 2. dio, Pomorski fakultet u rijeci, Rijeka, 2003, str.33

Najbolji pokazatelj efikasnosti sustava masovnog opsluživanja je vrijeme koje jedinica provede u samom sustavu (W). Na vrijeme koje jedinica provede u čekanju i tijekom opsluživanja utječu sljedeći parametri: intenzitet toka dolazaka jedinica i kapacitet sustava opsluživanja. Kapacitet sustava masovnog opsluživanja prikazuje se pomoću izraza :

$$\mu_{\Sigma} = S * \mu, \quad ^{22}$$

što se može definirati kao zbroj kapaciteta masovnog opsluživanja svih uslužnih mjesta, u izrazu s predstavlja broj uslužnih mjesta a μ prosječan intenzitet opsluživanja pojedinog uslužnog mjesta.

²²Zenzerović, Z: Teorija redova čekanja, stohastički procesi 2. dio, Pomorski fakultet u rijeci, Rijeka, 2003, str.39

4.6. TROŠKOVI ČEKANJA

Čekanjem nastaju troškovi jedinica ali i troškovi kanala, stoga se javlja potreba za uvođenje vrijednosnih pokazatelja planiranja i efikasnosti sustava.

Da da bi se eliminirao problem čekanja u sustavu opsluživanja potrebno je otvoriti velik broj kanala, da jedinice uopće ne čekaju, ili određen broj kanala koji će stalno imati posla, time postizemo iskorištenost kanala. Eliminiranje čekanja jednog sudionika dovodi do maksimalnog čekanja drugog sudionika u sustavu čekanja. Kako bi se postigao kriterij optimizacije, a to je minimalno vrijeme čekanja, onda je optimalni broj kanala onaj za koji zbroj navedenih troškova preračunat za odabranu vremensku jedinicu prima minimalnu vrijednost. Optimalna solucija je ona koja će gubitke čekanja svesti na minimum. Ukupni troškovi čekanja jednog sustava opsluživanja (C) sadrže:

1. troškove nastale zbog čekanja jedinica (C_w) i
2. troškove zbog neiskorištenosti uslužnih mjesta (C_p)²³

Troškovi čekanja jedinica izračunavaju se pomoću izraza:

$$C_w = c_w * L_Q * t,$$

gdje je :

c_w - iznos (u novčanim jedinicama) troška u jedinici vremena

L_Q - prosječan broj jedinica u redu čekanja

t - duljina vremenskog perioda za koji se izračunavaju troškovi.

Troškovi nezauzetih uslužnih mjesta izračunavaju se sljedećom formulom:

$$C_p = c_p * (S - \rho) * t,$$

gdje je :

c_p - iznos (u novčanim jedinicama) troška u jedinici vremena nastalog zbog „čekanja„odnosno nezauzetosti kanala

²³Zenzerović, Z: Teorija redova čekanja, stohastički procesi 2. dio, Pomorski fakultet u rijeci, Rijeka, 2003, str.47

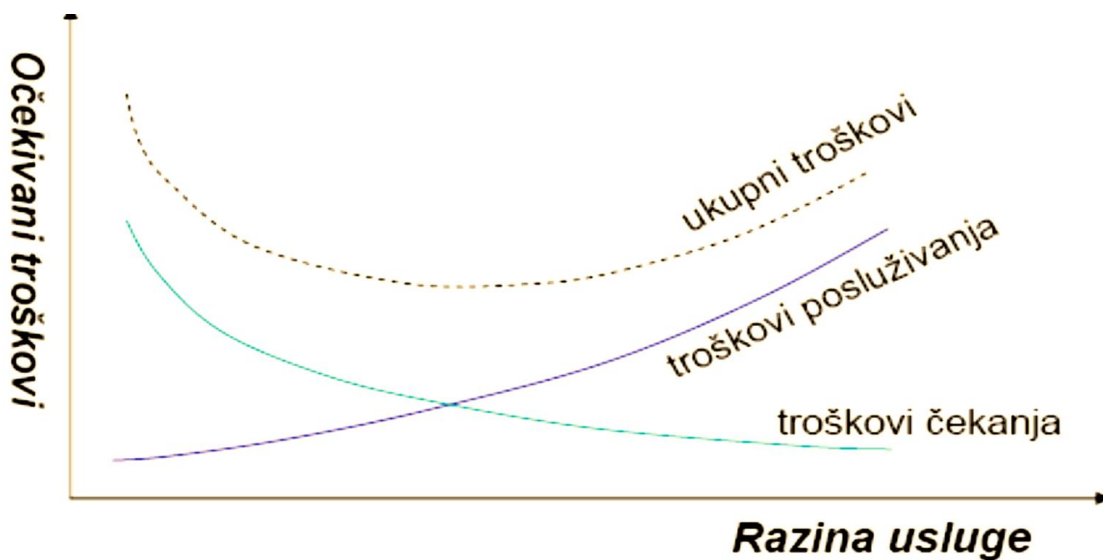
$(S-\rho)$ - broj slobodnih kanala

t - duljina vremenskog perioda za koji se izračunavaju troškovi.

Ukupni troškovi čekanja prikazani su na grafikonu a izračunavaju se sljedećem formulom:

$$C = [c_w * L_Q * t + c_p * (S - \rho) * t]$$

Grafikon 7. Prikaz troškova



Izvor: Šimunović, Lj.: Teorija repova/redova, Fakultet prometnih znanosti, Zagreb, str. 47

Korisniku je u cilju da što manje čeka u redu, a davatelju usluga prioritet je da sa što manje kanala obavi što veći promet. Zato u obzir treba uzeti ukupne troškove koji nastaju čekanjem (C), ipak su interesi korisnika i davatelja usluga isprepleteni, davatelju usluga nije u interesu da korisnik dugo čeka da ne bi došlo do preorijentacije korisnika u drugi sustav. Ali isto tako ako su uslužna mjesta malo korištena to može utjecati na poskupljenje a ni poskupljenje nije u interesu korisnika. Tako bi prema nekim autorima funkcija troškova osim troškova čekanja korisnika i troškova stanja uslužnih mjesta trebala uključivati i troškove eksploatacije pojedinog kanala. Tada bi se ukupni troškovi izračunavali sljedećom formulom:

$$\begin{aligned} C &= \lambda * W_Q * c_w + (S-\rho) * c_p + S_z * c_{S_z} \\ &= L_Q * c_w + (S-\rho) * c_p + \rho * c_{S_z}^{24} \end{aligned}$$

²⁴Zenzerović, Z: Teorija redova čekanja, stohastički procesi 2. dio, Pomorski fakultet u rijeci, Rijeka, 2003, str.49

gdje je :

c_w - iznos troškova čekanja korisnika

c_p - iznos troška stanja uslužnog mjesta

c_{sz} - iznos eksploatacije zauzetih uslužnih mjesta

S_z - broj zauzetih pristana.

5. LUKA KAO SUSTAV MASOVNOG OPSLUŽIVANJA – ANALIZA SLUČAJA

Luka predstavlja sustav masovnog opsluživanja, s time da brodovi predstavljaju ulazne jedinice koje stoje u redu da bi bili opsluženi. Brodovi mogu biti zavisno od situacije i odmah opsluženi, krajnji cilj je uvijek isti nakon obavljenog iskrcavanja izaći iz sustava. Situacija može biti i obrnuta da se na brod krca teret. Dolasci broda i duljina vremena opsluživanja uzimaju se kao slučajne varijable koje je moguće analizirati analitičkim metodama ili simulacijom.

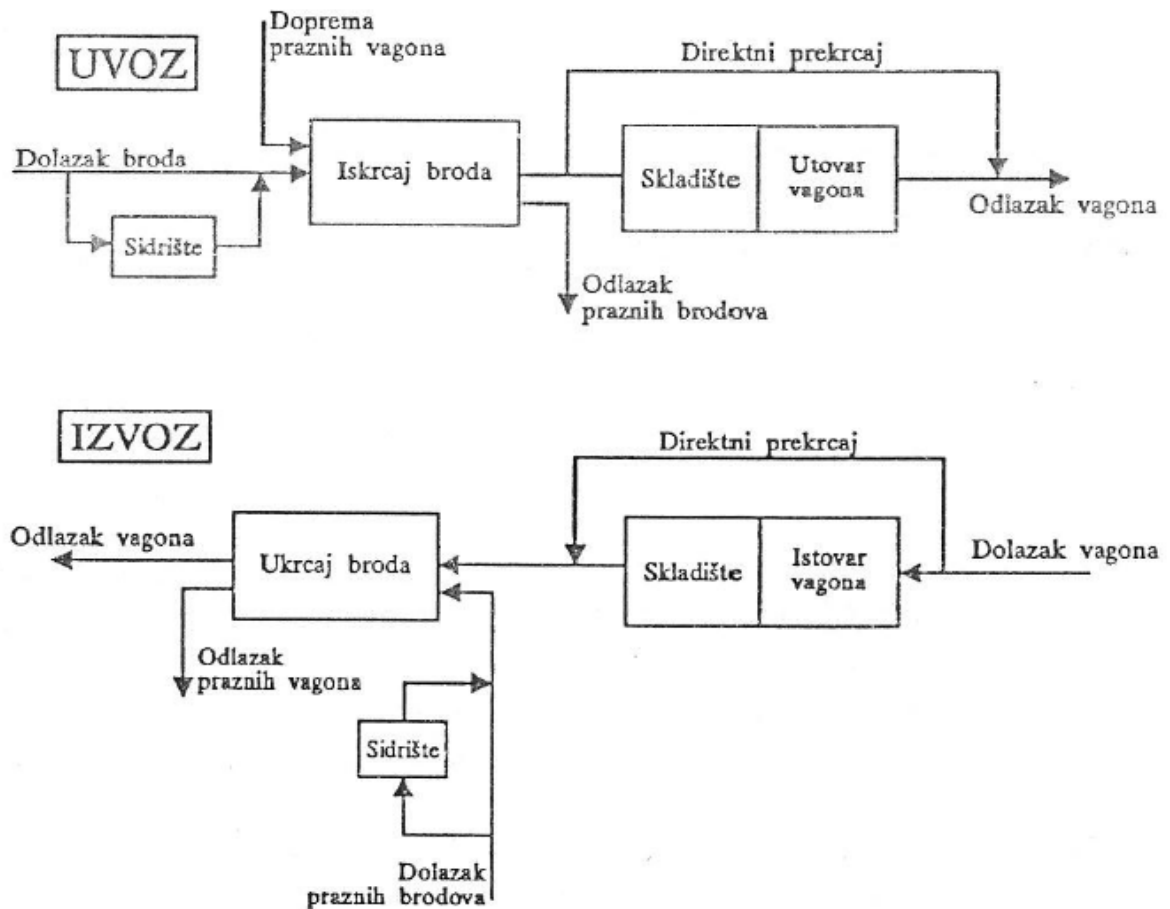
Luku kao sustav masovnog opsluživanja karakteriziraju dvije činjenice a to su:

1. nije moguće predvidjeti točno vrijeme dolaska pojedinog broda u luku jer ono zavisi od luke polaska, duljine puta, brzine kretanja, meteoroloških prilika i drugih neplaniranih razloga.
2. a osim toga nepredvidljivo je vrijeme opsluživanja pojedinog broda (vrijeme trajanja prekrcajnih operacija) jer ono zavisi od količine tereta, vrste tereta, kapaciteta, tehnologije koja se koristi za prekrcaj, vremenskih prilika itd.²⁵

Često se dešava da je broj brodova koji je stigao u luku (ulazne jedinice) veći od postojećih kapaciteta pristana, tada brodovi idu u red čekanja. Javlja se i obrnut slučaj kada brodovi ne čekaju, samim tim ne ulaze u red čekanja, ali tada kapaciteti pristana nisu u potpunosti iskorišteni. U ovom slučaju riječ je o iskrcaju, tokovi tereta mogu se promatrati iz dva smjera uvoz i izvoz, iskrcaj i ukrcaj. Međutim smjerovi tereta se ne razlikuju se pa će se pisati o iskrcaju, proces je prikazan je na shemi 3. Proces iskrcaja sastoji se od dvije faza, prva je sami iskrcaj tereta a druga je skladištenje tog teret. U prvoj fazi brodovi dolaze u luku određenim intenzitetom koji se označava oznakom λ . Ovisno o kojem je brodu i teretu riječ brod pristaje uz operativnu obalu na određeni pristan, u slučaju zauzeća pristana čeka na sidrištu. Luka se definira kao sustav s neograničenom duljinom reda čekanja. Nakon što se teret iskrca on se određenom vrstom transporta, ovisno o kojem je teretu riječ, prevozi u skladište s ciljem da bi bio otpremljen do konačnog odredišta.

²⁵Čarapić, LJ: Luka kao sistem i modeliranje luka, Zavod za novinarsko-istraživačku i propagandnu djelatnost JŽ, Beograd, 1983, str.51

Shema 3. Tokovi tereta u morskoj luci



Izvor: Schulze, G.: Modellierung hafen-betrieblicher Prozesse, Transpress, Berlin, 1977, str. 36

Luku kao sustav masovnog opsluživanja definira se kao složen sustav u kojem se nalazi više podsustava koji sami za sebe predstavljaju zasebni sustav masovnog opsluživanja. Jedan takav primjer je operativna obala s određenim brojem pristana, brodovi predstavljaju ulazne jedinice koje se trebaju opslužiti na kanalima. Kanale predstavljaju pristani sa svom potrebnom lučkom opremom. Vrlo je čest slučaj da u trenutku pristizanja broda u luku nema slobodnog pristana tada brod staje u red čekanja tj. u ovom slučaju na sidrište ili napušta luku, što je rijedak slučaj. Dakle, zaključujemo da je operativna obala sa određenim brojem pristana višekanalni sustav masovnog opsluživanja. U praksi je čest slučaj da zbog karakteristika tereta brod ne može stati na prvi slobodni pristan, već na određeni pristan specijaliziran za prekrcaj određene vrste tereta. U tom slučaju se javlja više zasebnih procesa opsluživanja.

Osim operativne obale s određenim brojem pristana u luci se javljaju i željeznički kolosjeci kao proces na kojem se vrši opsluživanje. Radi obavljanja utovara i istovara vlakovi s određenim brojem vagona pristižu na lučki terminal, osim vlakova imamo tu i cestovna vozila čija je struktura ista kao i kod željeznice. Struktura je sljedeća:

1. intenzitet toka dolazaka predstavlja prosječan broj vagona ili cestovnih vozila u jedinici vremena
2. kanale opsluživanja predstavljaju željeznički kolosjeci ili terminal za smještaj cestovnih vozila, čiji su kapaciteti određeni
3. kada su svi kolosjeci ili terminal za cestovna vozila popunjeni tj. zauzeti dolazi do reda čekanja. Često se u praksi uzima u obzir da broj mjesta na terminalu beskonačno velik zbog činjenice da vagoni ili cestovna vozila mogu stajati ispred lučkog terminala
4. i na kraju ovisno o vremenu trajanja pojedine operacije definira se intenzitet opsluživanja a to je prosječan broj izvršenih usluga u jedinici vremena.²⁶

Nakon definiranja dva podsustava koji se pojavljuju u luci kao sustavu masovnog opsluživanja ostaje nam još jedan ali ne manje bitan a to je podsustav skladišta. Kao što je u prethodnom tekstu spomenuto u luku dolaze vagoni i vozila koje treba istovariti u skladište ili natovariti teretom iz skladišta, osim ako se ne tovari izravno sa broda ili na njega. U ovom slučaju kanale opsluživanja predstavljaju uređaji koji su zaduženi za utovarne odnosno istovarne operacije. Za uspješno funkcioniranje luke potrebno je uskladiti rad svih navedenih podsustava međusobno. Svi navedeni podsustavi moraju biti usklađeni s kapacitetom najvažnijeg podsustava a to je sustav operativne obale s pristanima. Bez obzira na to u fazi projektiranja luke potrebno je uzeti u obzir sve podsustave koje luka obuhvaća.

Dolasci broda u luku su slučajna varijabla i predstavljaju ulazni tok. Odlasci broda definirani su kao izlazni tok. Svaki brod koji ulazi u luku ima zahtjeve za različitu vrstu opsluživanja ovisno o vrsti i tipu. Dakle dolazak brodova u luku je nehomogen. Osim toga tokove u luci definira se i kao neregularne jer se zahtjevi za opsluživanjem ne javljaju prema određenom rasporedu, jedino ako je riječ o linijskoj plovidbi. Iako i linijska plovidba može odstupati od reda plovidbe zbog izvanrednih okolnosti.

²⁶Zenzerović, Z: Teorija redova čekanja, stohastički procesi 2. dio, Pomorski fakultet u rijeci, Rijeka, 2003, str.53

S obzirom na vrijeme pojavljivanja broda prihvaća se činjenica da su tokovi u luci ordinirani tj. vrlo je mala vjerojatnost da se pojave dva broda u luci istovremeno koja imaju iste zahtjeve. Intenzitet toka dolaska broda u luku ne zavisi od vremena, konstantna je veličina i predstavlja prosječan broj brodova u jedinici vremena. Kaže se da su dolasci broda tokovi bez posljedica a to se objašnjava činjenicom da dolazak broda tijekom određenog vremenskog perioda ne ovisi o broju brodova koji su ranije pristigli u luku. Brodovi dolaze iz više smjerova, jedino ako nije riječ o specijaliziranoj luci za jednu vrstu u koju teret najčešće dolazi samo iz jednog ishodišta.

Tokovi koji se zbivaju u luci su jednostavni slučajni tokovi, stoga se luka definira i analizira kao sustav masovnog opsluživanja s karakteristikama:

1. otvorenog sustava; brodovi nisu sastavni dio luke
2. višekanalnog sustava; formiraju se redovi čekanja
3. dolasci broda raspoređeni su prema određenim teorijskim razdiobama (najčešće Poissonova)
4. brodovi u praksi rijetko napuštaju red čekanja pa se definiraju kao „strpljivi klijenti“
5. kao i dolasci broda tako se i vrijeme opsluživanja broda raspoređuje prema teorijskim razdiobama (najčešće Erlangova razdioba tj. eksponencijalna)
6. sustav s uzajamnom pomoći među kanalima; s obzirom na radnu snagu i mehanizaciju
7. u luci se opsluživanje obavlja najčešće prema pravilu FIFO; moguće je i prioritarno opsluživanje ovisno o vrsti tereta ili ugovorima brodara

5.1. PARAMETRI LUKE KAO SUSTAVA MASOVNOG OPSLUŽIVANJA

Prosječan broj brodova koji su uplovili u luku u promatranom vremenskom razdoblju predstavljaju intenzitet toka dolazaka jedinica, koji označava simbolom λ . Međutim u luku kao sustav masovnog opsluživanja ne dolaze brodovi iste nosivosti, pa je bolje uzimati u obzir prosječnu količinu tereta dovezenu brodovima u luku tijekom promatranog vremenskog razdoblja kao ulazne jedinice. U slučaju da se promatra samo određena vrsta tereta tada se za intenzitet toka dolazaka uzima prosječna količina tog tereta. Već je spomenuto da je dolazak brodova slučajna varijabla stoga broj brodova oscilira tijekom promatranog vremenskog razdoblja. Ali statističkom analizom moguće je utvrditi da broj brodova varira oko prosječne

vrijednosti te se stoga za intenzitet toka dolazaka (λ) uzima prosjek. Izračunava se kao jednostavna aritmetička sredina na temelju podataka o broju brodova i broja vremenskih jedinica. Analogno se definira i količina tereta.

Međutim, u stvarnosti se često ne raspolaže podacima o broju brodova unutar promatrane jedinice vremena, tada se za izračun koriste podaci koji govori koliko je vremena prošlo između dva uzastopna dolazaka broda. Prosječni vremenski interval između dva uzastopna dolaska označava se oznakom t_{dol} , a izračunava se pomoću sljedećeg izraza:

$$t_{dol} = \frac{1}{\lambda} ,$$

to je recipročna vrijednost intenziteta dolazaka jedinica, u ovom slučaju brodova, a intenzitet dolaska (λ) je onda recipročna vrijednost prosječnog vremenskog razmaka između dva uzastopna dolaska. Iz prethodne formule slijedi da za λ onda vrijedi sljedeći izraz:²⁷

$$\lambda = \frac{1}{t_{dol}} .$$

Isto vrijedi i za intenzitet opsluživanja. Kod morske luke kao sustava opsluživanja intenzitet opsluživanja po kanalu (μ) predstavlja prosječan broj brodova, ili prosječnu količinu tereta, koji se opslužuju u promatranoj vremenskoj jedinici. I u ovom slučaju uzima se aritmetička sredina s obzirom da je broj brodova kao i količina tereta također slučajna varijabla koja varira oko srednje vrijednosti.

Kao i u prethodnom slučaju ako broj brodova (ili količina tereta) nisu poznati iz Lučkog dnevnika određuje se vrijeme trajanja usluge za pojedini brod znači vrijeme koje je brod proveo u luci. Inače Lučki dnevnik sadrži bitne podatke kao što su vrijeme kada brod pozove luku radi ulaska, vrijeme dolaska do određenog pristana, vrijeme napuštanja pristana, vrijeme dolaska i odlaska do i od narednih pristana, vrijeme dolaska i odlaska do i od zone sidrenja tj. vrijeme čekanja. Dakle aritmetička sredina je prosječno vrijeme trajanja usluga po jednom brodu označava se t_{ust} , a izračunava se izrazom:

²⁷Zenzerović, Z: Teorija redova čekanja, stohastički procesi 2. dio, Pomorski fakultet u rijeci, Rijeka, 2003, str.55

$$t_{usl} = \frac{1}{\mu},$$

to je recipročna vrijednost intenziteta opsluživanja, a intenzitet opsluživanja je recipročna vrijednost prosječnog vremena trajanja usluge za koji vrijedi: ²⁸

$$\mu = \frac{1}{t_{usl}}.$$

Stupanj opterećenja pristana ρ odnos je između intenziteta toka dolazaka jedinica i intenziteta opsluživanja brodova.

5.2. IZRAČUN POKAZATELJA OPERATIVNE OBALE

Na temelju prethodnih poglavlja izvršava se izračun i analiza na temelju primjera iz prakse. U ovom primjeru razmatra se prvi podsustav od tri navedena a to je sustav operativne obale s pristanima. Za primjer je odabran sljedeći slučaj:

Morska luka na Mediteranu ima pet pristana koji joj služe za iskrcaj tereta. Tijekom godine u prosjeku u luku uplovi 407 brodova zbog operacije iskrcaja. Dolasci brodova slučajna su varijabla (Poissonova razdioba), kao i vrijeme iskrcaja broda (eksponencijalna razdioba). Za vrijeme opsluživanja broda uzima se prosjek od 68,35 sati po brodu. Rad se obavlja u tri smjene.

Morska luka spada u sustav s čekanjem i neograničenim brojem jedinica u redu čekanja čija je oznaka $M / M / S / \infty$. Prema formulama za tu vrstu problema provest ću izračun i analizu.

$$M / M / S / \infty$$

$$m = \infty$$

$$S = 5$$

²⁸ Zenzerović, Z: Teorija redova čekanja, stohastički procesi 2. dio, Pomorski fakultet u rijeci, Rijeka, 2003, str.56

1. Intenzitet toka dolazaka jedinica tj. brodova

$$\lambda = \frac{\text{prosječni broj brodova godišnje}}{\text{broj dana u godini}}$$

$$\lambda = \frac{470 \text{ brodova}}{365} = 1.2877 \text{ broda/dan}$$

2. Intenzitet opsluživanja jedinica tj. brodova

$$\mu = \frac{\text{broj sati na dan}}{\text{prosječno vrijeme opsluživanje broda}}$$

$$\mu = \frac{24 \text{ h}}{68.35 \text{ h}} = 0.3511 \text{ broda/dan}$$

3. Stupanj opterećenja pristana

$$\rho = \frac{\text{intenzitet toka dolazaka jedinica}}{\text{intenzitet opsluživanja broda}}$$

$$\rho = \frac{1.2877}{0.3511} = 3.6676$$

4. Koeficijent iskorištenja sustava tj. pristana

$$\rho_s = \frac{\text{stupanj opterećenja sustava}}{\text{broj kanala (pristana)}}$$

$$\rho_s = \frac{3.6676}{5 \text{ pristana}} = 0.7335 ,$$

što znači da je svaki pristan opterećen sa 73 % od ukupnog kapaciteta.

5. Vjerojatnost da su svi pristani slobodni, da brod neće morati čekati

$$P_0 = \left[1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \dots + \frac{\rho^S}{S!} + \frac{\rho^{S+1}}{S!(S-\rho)} \right]^{-1}$$

$$\begin{aligned}
P_0 &= \left[1 + 3.6676 + \frac{3.6676^2}{2!} + \frac{3.6676^3}{3!} + \frac{3.6676^4}{4!} + \frac{3.6676^5}{5!} + \frac{3.6676^{5+1}}{5!(5-3.6676)} \right]^{-1} \\
&= \left[4.6676 + 6.7256 + 8.2223 + 7.5390 + 5.5300 + \frac{2433.8387}{159.888} \right]^{-1} \\
&= [32.6845 + 15.2221]^{-1} \\
&= 0.02087,
\end{aligned}$$

znači vjerojatnost da brod neće morati čekati jer će pristan biti slobodan je 2%.

6. Prosječan broj jedinica (brodova) u redu čekanja

$$L_Q = \frac{\rho^{s+1}}{(s-1)!(s-\rho)^2} * P_0$$

$$L_Q = \frac{3.6676^{5+1}}{(5-1)!(5-3.6676)^2} * 0.02087$$

$$L_Q = \frac{2433.8387}{42.6069} * 0.02087$$

$$L_Q = 1.1922 \text{ brodova}$$

7. Prosječan broj jedinica (brodova) u sustavu

$$L = L_Q + \rho$$

$$L = 1.1922 + 3.6676$$

$$L = 4.8598 \text{ brodova}$$

8. Prosječno vrijeme koje jedinica (brod) mora provesti u redu čekanja

$$W_Q = \frac{L_Q}{\lambda}$$

$$W_Q = \frac{1.1922}{1.2877}$$

$$W_Q = 0.9258 \text{ dana} * 24 \text{ h} = 22.22 \text{ h}$$

9. Prosječno vrijeme koje jedinica provodi u sustavu (luci)

$$W = \frac{L}{\lambda}$$

$$W = \frac{4.8598}{1.2877}$$

$$W = 3.7740 \text{ dana} * 24 \text{ h} = 90.58 \text{ h}$$

10. Prosječno vrijeme usluživanja jedinice (broda)

$$W_{\text{usl}} = W - W_Q$$

$$W_{\text{usl}} = 3.7740 - 0.9258$$

$$W_{\text{usl}} = 2.8482 \text{ dana} * 24 \text{ h} = 68.3568 \text{ h}$$

Temeljem provedenog izračuna dobivaju se podaci koji služe za analizu. Oni upućuju na to da koeficijent iskorištenja lučkog sustava 73% od ukupnog kapaciteta što upućuje na nedovoljnu iskorištenost pristana. Taj bi se promet mogao savladati i sa manjim brojem pristana, odnosno četiri pristana. Vjerojatnost da će pristan biti slobodan tj. da brod neće morati čekati je vrlo mala i iznosi samo 2%. Prosječan broj brodova u čitavom sustavu iznosi 4.8598, dok je broj brodova u redu čekanja 1.1922. Dakle broj brodova koji se opslužuju jednak je stupnju opterećenja pristana i iznosi 3.6676. Vrijeme koje brod provede u redu čekanja je 22.22 sati, a u čitavom sustavu 90.58 sati. Vrijeme usluživanja broda jednako je razlici vremena provedenog u sustavu i vremena provedenog u redu čekanja.

Daljnjom analizom utvrdit će se što bi se događalo i kakva bi bila propusna moć kada bi se smanjio ili povećao broj pristana, te koje je rješenje najbolje uz najveću iskorištenost i najmanje troškove.

5.2.1. Izračun parametara funkcioniranja sustava sa četiri uslužna kanala

Pokazatelji funkcioniranja lučkog sustava $M / M / S / \infty$ ako broj pristana smanjimo sa pet na četiri su sljedeći; uz to da intenzitet toka dolazaka brodova ostaje isti $\lambda = 1.2877$ brodova/dan

kao i intenzitet opsluživanja brodova $\mu = 0.3511$ broda/dan a samim tim i stupanj opterećenja pristana ostaje 3.6676.

$M / M / S / \infty$

$m = \infty$

$S = 4$

1. Koeficijent iskorištenja sustava tj. pristana

$$\rho_s = \frac{\text{stupanj opterećenja sustava}}{\text{broj kanala (pristana)}}$$

$$\rho_4 = \frac{3.6676}{4 \text{ pristana}} = 0.9169$$

U ovom slučaju kada imamo četiri pristana na raspolaganju svaki je opterećen sa 91% od ukupnog kapaciteta, što upućuje na to da je iskorištenost veća za 18% u odnosu na prethodni slučaj kada smo raspolagali sa pet pristana.

2. Vjerojatnost da su svi pristani slobodni, da brod neće morati čekati

$$P_0 = \left[1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \dots + \frac{\rho^S}{S!} + \frac{\rho^{S+1}}{S!(S-\rho)} \right]^{-1}$$

$$\begin{aligned} P_0 &= \left[1 + 3.6676 + \frac{3.6676^2}{2!} + \frac{3.6676^3}{3!} + \frac{3.6676^4}{4!} + \frac{3.6676^{4+1}}{4!(4-3.6676)} \right]^{-1} \\ &= \left[4.6676 + 6.7256 + 8.2223 + 7.5390 + \frac{663.6053}{7.9776} \right]^{-1} \\ &= [27.1545 + 83.1836]^{-1} \\ &= 0.0091 \end{aligned}$$

Vjerojatnost da brod neće morati čekati je manja nego u prethodnom slučaju što je logično jer se broj kanala za opsluživanje smanjio, vjerojatnost iznosi samo 0.9% da će pristani biti slobodni.

3. Prosječan broj jedinica (brodova) u redu čekanja

$$L_Q = \frac{\rho^{s+1}}{(s-1)!(s-\rho)^2} * P_0$$

$$L_Q = \frac{3.6676^{4+1}}{(4-1)!(4-3.6676)^2} * 0.0091$$

$$L_Q = \frac{663.6053}{0.663} * 0.0091$$

$$L_Q = 9.0683 \text{ brodova}$$

Došlo je do povećanja broja brodova u redu čekanja sa 1.1922 na 9.0683 u odnosu na prethodni slučaj.

4. Prosječan broj jedinica (brodova) u sustavu

$$L = L_Q + \rho$$

$$L = 9.0683 + 3.6676$$

$$L = 12.7359 \text{ brodova}$$

Osim što se povećao broj brodova u redu čekanja povećao se i broj brodova u čitavom sustavu, dakle smanjenjem broja pristana povećava se broj brodova u redu čekanja i u sustavu.

5. Prosječno vrijeme koje jedinica (brod) mora provesti u redu čekanja

$$W_Q = \frac{L_Q}{\lambda}$$

$$W_Q = \frac{9.0683}{1.2877}$$

$$W_Q = 7.0422 \text{ dana} * 24 \text{ h} = 169.0139 \text{ h}$$

6. Prosječno vrijeme koje jedinica provodi u sustavu (luci)

$$W = \frac{L}{\lambda}$$

$$W = \frac{12.7359}{1.2877}$$

$$W = 9.8904 \text{ dana} * 24 \text{ h} = 237.3702 \text{ h}$$

Vrijeme koje brod mora provesti u redu čekanja kao i u samom sustavu povećalo se u odnosu na prethodni slučaj kada smo raspolagali sa pet pristana.

7. Prosječno vrijeme usluživanja jedinice (broda)

$$W_{\text{usl}} = W - W_Q$$

$$W_{\text{usl}} = 9.8904 - 7.0422$$

$$W_{\text{usl}} = 2.8482 \text{ dana} * 24 \text{ h} = 68.3568 \text{ h}$$

U slučaju da se broj pristana još smanji sa četiri na tri koeficijent iskorištenja lučkog sustava bio bi veći od 1. Za redove čekanja s beskonačnim brojem jedinica, u ovom slučaju su to brodovi, u redu uvjet stabilnosti sustava zahtijeva da je jednak ili manji od jedan npr. ako imamo tri pristana koeficijent iskorištenja bio bi $= \frac{3.6676}{3 \text{ pristana}} = 1.2225$, taj broj bi se samo povećavao smanjenjem broja pristana a to bi uvjetovalo nestabilnost sustava.

5.2.2. Izračun parametara funkcioniranja sustava sa šest uslužna kanala

U trećem slučaju povećat će se broj pristana na šest. Osnovni podaci ostaju opet isti intenzitet toka brodova iznosi 1.2877 broda/dan (λ), intenzitet opsluživanja brodova je 0.3511 broda/dan (μ) te stupanj opterećenja 3.6676 (ρ) a broj pristana povećan je na šest (S).

$$M / M / S / \infty$$

$$m = \infty$$

$$S = 6$$

1. Koeficijent iskorištenja sustava tj. pristana

$$\rho_s = \frac{\text{stupanj opterećenja sustava}}{\text{broj kanala (pristana)}}$$

$$\rho_6 = \frac{3.6676}{6 \text{ pristana}} = 0.6113$$

Svaki pristan opterećen sa 61 % od ukupnog kapaciteta, povećanjem broja pristana opterećenje se smanjuje.

2. Vjerojatnost da su svi pristani slobodni, da brod neće morati čekati

$$P_0 = \left[1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \dots + \frac{\rho^s}{s!} + \frac{\rho^{s+1}}{s!(s-\rho)} \right]^{-1}$$

$$\begin{aligned} P_0 &= \left[1 + 3.6676 + \frac{3.6676^2}{2!} + \frac{3.6676^3}{3!} + \frac{3.6676^4}{4!} + \frac{3.6676^5}{5!} + \frac{3.6676^6}{6!} + \frac{3.6676^{6+1}}{6!(6-3.6676)} \right]^{-1} \\ &= \left[4.6676 + 6.7256 + 8.2223 + 7.5390 + 5.5300 + 3.38003 + \frac{8926.3466}{1679.328} \right]^{-1} \\ &= [36.0648 + 5.3154]^{-1} \\ &= 0.0242 \end{aligned}$$

Vjerojatnost da će pristan biti slobodan se povećava sa povećanjem broja pristana .

3. Prosječan broj jedinica (brodova) u redu čekanja

$$L_Q = \frac{\rho^{s+1}}{(s-1)!(s-\rho)^2} * P_0$$

$$L_Q = \frac{3.6676^{6+1}}{(6-1)!(6-3.6676)^2} * 0.0242$$

$$L_Q = \frac{8926.3466}{652.8108} * 0.0242$$

$$L_Q = 0.3309 \text{ brodova}$$

4. Prosječan broj jedinica (brodova) u sustavu

$$L = L_Q + \rho$$

$$L = 0.3309 + 3.6676$$

$$L = 3.9985 \text{ brodova}$$

Prosječan broj brodova u redu čekanja kao i u samom sustavu se povećanjem broja pristana smanjuje.

5. Prosječno vrijeme koje jedinica (brod) mora provesti u redu čekanja

$$W_Q = \frac{L_Q}{\lambda}$$

$$W_Q = \frac{0.3309}{1.2877}$$

$$W_Q = 0.2570 \text{ dana} * 24 \text{ h} = 6.1672 \text{ h}$$

6. Prosječno vrijeme koje jedinica provodi u sustavu (luci)

$$W = \frac{L}{\lambda}$$

$$W = \frac{3.9985}{1.2877}$$

$$W = 3.105 \text{ dana} * 24 \text{ h} = 74.5236 \text{ h}$$

7. Prosječno vrijeme usluživanja jedinice (broda)

$$W_{\text{usl}} = W - W_Q$$

$$W_{\text{usl}} = 3.1051 - 0.2570$$

$$W_{\text{usl}} = 2.8481 \text{ dana} * 24 \text{ h} = 68.3544 \text{ h}$$

Prilikom povećanja broja pristana smanjilo se i vrijeme koje brod provodi u lučkom sustavu a samim tim i u redu čekanja.

5.2.3. Izračun parametara funkcioniranja sustava sa osam uslužnih kanala

Broj pristana poveća sa pet na osam i dalje je $\lambda = 1.2877$ broda/dan, $\mu = 0.3551$ broda/dan i $\rho = 3.6676$.

M / M / S / ∞

m = ∞

S = 8

1. Koeficijent iskorištenja sustava tj. pristana

$$\rho_s = \frac{\text{stupanj opterećenja sustava}}{\text{broj kanala (pristana)}}$$

$$\rho_8 = \frac{3.6676}{8 \text{ pristana}} = 0.4584$$

Svaki pristan je opterećen sa 45 % od ukupnog kapaciteta što nikako nije dobro jer dolazi do neiskoristivosti sustava.

2. Vjerojatnost da su svi pristani slobodni, da brod neće morati čekati

$$P_0 = \left[1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \dots + \frac{\rho^S}{S!} + \frac{\rho^{S+1}}{S!(S-\rho)} \right]^{-1}$$

$$P_0 = \left[1 + 3.6676 + \frac{3.6676^2}{2!} + \frac{3.6676^3}{3!} + \frac{3.6676^4}{4!} + \frac{3.6676^5}{5!} + \frac{3.6676^6}{6!} + \frac{3.6676^7}{7!} + \frac{3.6676^8}{8!} + \frac{3.6676^{8+1}}{8!(8-3.6676)} \right]$$

$$\left[4.6676 + 6.7256 + 8.2223 + 7.5390 + 5.5300 + 3.38003 + 1.7711 + 0.8120 + \frac{120070.8753}{174682.368} \right]^{-1}$$

$$= [38.64793 + 0.6874]^{-1}$$

$$= 0.0254$$

Vjerojatnost da će pristan biti slobodan i dalje je mala te iznosi 2.5%

3. Prosječan broj jedinica (brodova) u redu čekanja

$$L_Q = \frac{\rho^{s+1}}{(s-1)!(s-\rho)^2} * P_0$$

$$L_Q = \frac{3.6676^9}{(8-1)!(8-3.6676)^2} * 0.0254$$

$$L_Q = \frac{120070.8753}{94599.23639} * 0.0254$$

$$L_Q = 0.0322 \text{ brodova}$$

4. Prosječan broj jedinica (brodova) u sustavu

$$L = L_Q + \rho$$

$$L = 0.0322 + 3.6676$$

$$L = 3.6998 \text{ brodova}$$

Prosječan broj brodova u redu čekanja kao i u samom sustavu još se više smanjio.

5. Prosječno vrijeme koje jedinica (brod) mora provesti u redu čekanja

$$W_Q = \frac{L_Q}{\lambda}$$

$$W_Q = \frac{0.0322}{1.2877}$$

$$W_Q = 0.0250 \text{ dana} * 24 \text{ h} = 0.60 \text{ h}$$

6. Prosječno vrijeme koje jedinica provodi u sustavu (luci)

$$W = \frac{L}{\lambda}$$

$$W = \frac{3.6998}{1.2877}$$

$$W = 2.8732 \text{ dana} * 24 \text{ h} = 68.96 \text{ h}$$

7. Prosječno vrijeme usluživanja jedinice (broda)

$$W_{\text{usl}} = W - W_Q$$

$$W_{\text{usl}} = 2.8732 - 0.0250$$

$$W_{\text{usl}} = 2.8482 \text{ dana} * 24 \text{ h} = 68.3544 \text{ h}$$

Vrijeme koje brod provodi u sustavu sve se više smanjuje.

5.3. ANALIZA POKAZATELJA UČINAKA OPERATIVNE OBALE

Na temelju provedenog izračuna moguće je izvršiti analizu morskog sustava (operativne obale). Radi lakšeg razumijevanja izrađena je tabela pokazatelja funkcioniranja lučkog sustava na temelju ulaznih podataka: $\lambda = 1.2877$ broda/dan i $\mu = 0.3511$ broda/dan te izračunatog $\rho = 3.6676$.

Tabela 1. Pokazatelji funkcioniranja lučkog sustava (M/M/S/∞)

S	ρ/S	L	L_Q	W	W_Q	P_0
3	1.2225	-	-	-	-	-
4	0.9169	12.7359	9.0683	9.8904	7.0422	0.0091
5	0.7335	4.8598	1.1922	3.7740	0.9258	0.0208
6	0.6113	3.9985	0.3309	3.1051	0.2570	0.0242
8	0.4584	3.6998	0.0322	2.8732	0.0250	0.0254

Izvor: izradila autorica

Već u prijašnjem poglavlju objašnjen je utjecaj intenziteta opsluživanja na ukupno vrijeme boravka broda u luci. Ako se uz nepromijenjeni broj pristana poveća vrijeme opsluživanja broda tada se intenzitet opsluživanja smanjuje a stupanj opterećenja povećava npr. ako vrijeme opsluživanja povećamo sa 68.35 sati po brodu na 73 sati po brodu dobiva se sljedeći rezultat:

$$M / M / S / \infty$$

$$m = \infty$$

$$S = 5$$

$$\lambda = \frac{\text{prosječni broj brodova godišnje}}{\text{broj dana u godini}}$$

$$\lambda = \frac{470 \text{ brodova}}{365} = 1.2877 \text{ broda/dan}$$

Intenzitet toka dolazaka jedinica ostaje isti ali se intenzitet opsluživanja mijenja u:

$$\mu = \frac{\text{broj sati na dan}}{\text{prosječno vrijeme opsluživanje broda}}$$

$$\mu = \frac{24 \text{ h}}{73 \text{ h}} = 0.39175 \text{ broda/dan}$$

Ako se mijenja intenzitet opsluživanja mijenja se i stupanj opterećenja pristana i to na sljedeći način:

$$\rho = \frac{\text{intenzitet toka dolazaka jedinica}}{\text{intenzitet opsluživanja broda}}$$

$$\rho = \frac{1.2877}{0.3287} = 3.9175$$

Uz nepromijenjen broj pristana vrijeme opsluživanja broda poveća se za 4.65 sati a intenzitet opsluživanja smanji za 0.0224 broda na dan samim tim opterećenje pristana se poveća za 0.4499.

Smanjenjem broja pristana od pet na četiri prosječan broj brodova u redu čekanja raste za 6.12 brodova, a vrijeme čekanja za 146.79 sati. Povećanjem broja pristana sa pet na šest dolazi do smanjenja prosječnog broja brodova u redu čekanja i to za 0.8613 brodova, u slučaju

povećanja na osam pristana još više će se smanjiti broj brodova u redu čekanja. Povećanjem broja pristana smanjuje se i vrijeme čekanja brodova u odnosu sa pet na šest pristana vrijeme će se smanjiti za 16.05 sati a kod osam pristana za 21.62 sati.

Svako daljnje povećanje pristana od pet nadalje bilo bi neracionalno, jer ne utječe na drastično smanjenje broja brodova u redu čekanja. Dakle veća efikasnost lučkog sustava postiže se porastom kapaciteta sustava tj. povećanjem broja pristana ili pak povećanjem intenziteta opsluživanja pristana. Uvijek je u praksi cilj postići povećanje intenziteta opsluživanja pristana, a u slučaju da to nije moguće tada se donosi odluka o povećanju broja pristana.

6. ZAKLJUČAK

Temeljem provedenih izračuna i analize dobivenih parametara o funkcioniranju luke kao sustava masovnog opsluživanja zaključujemo da, ako ne možemo smanjiti vrijeme opsluživanja broda, mijenjamo broj pristana a to utječe na povećanje odnosno smanjenje vrijednosti pokazatelja lučkog sustava. Ako povećamo broj pristana smanjujemo prosječan broj brodova u redu čekanja ali i u samom lučkom sustavu osim što smanjujemo prosječan broj brodova smanjuje se vrijeme čekanja u redu i u potpunom lučkom sustavu te se smanjuje vjerojatnost čekanja na slobodan pristan. Smanjenjem prosječnog broja brodova i vremena koje on provodi u lučkom sustavu nailazimo na jedan drugi problem a to je povećanje neiskorištenosti pristana. Dakle, nije dobro ako pristan ima veliki postotak neiskorištenosti ali ni dugo čekanje broda, stoga se nastoji postići optimizacija.

Uzimajući u obzir provedenu analizu vidimo da nije moguće eliminirati čekanje s jedne i s druge strane tj. brodova i pristana. Stoga se postavlja pitanje kako odrediti optimalan broj pristana u luci kako bi korisnici a samim tim i luka bili funkcionalni ali i racionalni. Drugo pitanje koje se nameće je efikasnost luke. Pri ocjeni efikasnosti se koristi pokazatelj W (prosječno vrijeme broda provedeno u luci), kako bi se on smanjio potrebno je povećati broj pristana ili smanjiti vrijeme opsluživanja. U praksi smanjenje vremena opsluživanja zna biti vrlo nezgodno jer može utjecati na kvalitetu pružane usluge, a ako korisnici nisu zadovoljni uslugom dolazi do smanjenja broja dolazaka brodova.

Sljedeći važan faktor jesu troškovi, potrebno je izračunati troškove koji nastaju zbog čekanja i ukupne troškove koje ima sami sustav opsluživanja tj. luka. Potrebno je odrediti broj pristana za koje će iznos ukupnih troškova čekanja biti najniži mogući.

Primjenjujući teoriju redova čekanja na lučki sustav masovnog opsluživanja povećava se efikasnosti sustava te bolje planiranje kako u sadašnjosti tako i u budućnosti. Cilj je pratiti ponašanje lučkog sustava kako bi se stvorili parametri za efikasno upravljanje.

POPIS LITERATURE

Knjige:

1. Barković, D: operacijska istraživanja, Ekonomski fakultet, Osijek, 2001
2. Bešlić, S: Markovljevi modeli u planiranju kapaciteta lučkih sredstava za rad, magistarski rad, Pomorski fakultet u Rijeci, Rijeka, 2001
3. Čarapić, LJ: Luka kao sistem i modeliranje luka, Zavod za novinarsko-istraživačku i propagandnu djelatnost JŽ, Beograd, 1983
4. Čerić, V: Simulacijsko modeliranje, Školska knjiga, Zagreb, Zagreb, 1993
5. Dobrenić, S: Operativno istraživanje, Fakultet organizacije i informatike, Varaždin, 1978
6. Dundović, Č: Lučki terminali-tehnologija luka i terminala, Pomorski fakultet u Rijeci, Rijeka, 2002
7. Kaufmann, A: Methodes et modeles de la recherche operationnelle, Dunod, Paris, 1970
8. Petrić, J: Operacijska istraživanja, knjiga 2., Suvremena administracija, Beograd, 1976
9. Sazdanović, S: Elementi operacijskih istraživanja, Naučna knjiga, Beograd 1980
10. Schulze, G: Modellierung hafen-betrieblicher Prozesse, Transpress, Berlin, 1977
11. Vukadinović, S: Elementi teorije masovnog opsluživanja, Naučna knjiga, Beograd, 1975
12. Zečević, T: Operacijska istraživanja, Naučna knjiga, Beograd, 1974
13. Zenzerović, Z: Teorija redova čekanja, stohastički procesi 2. dio, Pomorski fakultet u rijeci, Rijeka, 2003
14. Zenzerović, Z: Optimizacijski modeli planiranja kapaciteta morskih luka, doktorska disertacija, Ekonomski fakultet Rijeka, Rijeka, 1995
15. Žiljak, V: Simulacija računalom, Školska knjiga, Zagreb, 1982

Ostali izvori:

1. http://www.dmi.uns.ac.rs/site/dmi/download/master/primenjena_matematika/ElviraKlebecko.pdf
2. <http://www.masinac.org/downloads/operaciona%20istrazivanja/predavanja/predavanjeor04teorijaredova1revised.pdf>

3. http://e-student.fpz.hr/Predmeti/O/Osnove_prometnog_inzenjerstva/Materijali/OPI_PRED_AVANJE_2012.pdf
4. <http://www.timetoast.com/timelines/povijesni-pregled-teorije-redova-cekanja>
5. <http://www.pfri.uniri.hr/~bdrascic/OI/redovi-cekanja.pdf>

POPIS SHEMA

Shema 1. Proces opsluživanja jedinica s tri uslužna mjesta (kanala).....	5
Shema 2. Prikaz različitih vrsta redova čekanja	8
Shema 3. Tokovi tereta u morskoj luci.....	33

POPIS TABELA

Tabela 1	48
----------------	----

POPIS GRAFIKONA

Grafikon 1. Gustoća Erlangove razdiobe vremena opsluživanja za $k=1,2,3$	17
Grafikon 2. Zavisnost vjerojatnosti P_0 od broja kanala (S) i koeficijenta iskorištenja sustava (ρ /S).....	26
Grafikon 3. Zavisnost vjerojatnosti P_0 od broja kanala (s) i stupnja opterećenja kanala (ρ)....	26
Grafikon 5. Zavisnost prosječnog broja jedinica u redu čekanja (L_Q) od broja kanala (S) i koeficijenta iskorištenja sustava (ρ /S)	27
Grafikon 6. Zavisnost prosječnog vremena čekanja jedinice (W_Q) od broja kanala (S) i koeficijenta iskorištenja sustava (ρ /S)	28
Grafikon 7. Prikaz troškova	30